$\pi \approx 3$

verlaghpt.at

Sidlo
Puhm
Steinmair
Camilo
Pollack-Drs
Wymlatil

Neu nach Lehrplan 2011

MATHE-MATIK 2

mit technischen Anwendungen

- BILDUNGSSTANDARDS
- KOMPETENZORIENTIERT
- ZUR NEUEN RDP

Eva-Maria Sidlo – Ursula Puhm – Cornelia Steinmair – Christina Camilo – Susanne Pollack-Drs – Georg Wymlatil
unter Mitarbeit von Wolfgang Drs

Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 2 Neu nach Lehrplan 2011

Um die Übersicht zu erhöhen und das Arbeiten mit dem Buch zu erleichtern, sind die Aufgaben durch farbige Aufgabennummern differenziert:

- Einstiegsaufgaben (also Aufgaben, die zu einem neuen Themenbereich hinführen) sind durch **orangefarbene** Aufgabennummern gekennzeichnet.
- **Schwarze** Aufgabennummern kennzeichnen Aufgaben, deren Lösung im Lehrbuch vollständig dargestellt wird. Solche Aufgaben sind darüber hinaus auch durch eine blaue Rasterunterlegung vom übrigen Text deutlich abgegrenzt.
- Die anderen Aufgaben sind je nach Anspruchsniveau durch **rote** (niedriges Anspruchsniveau), **blaue** (mittleres Anspruchsniveau) und **grüne** (hohes Anspruchsniveau) Aufgabennummern gekennzeichnet. Die mit dieser Kennzeichnung vorgenommene Differenzierung ist für den Unterricht nicht verbindlich.

Bei jeder Aufgabe wird angeführt, welche **Handlungsdimensionen** gemäß dem **Kompetenzmodell (Bildungsstandards Angewandte Mathematik BHS)** jeweils angesprochen werden:

A … Modellieren und Transferieren
B … Operieren und Technologieeinsatz
C … Interpretieren und Dokumentieren
D … Argumentieren und Kommunizieren

Die überwiegend angesprochene **Inhaltsdimension** wird jeweils am unteren Seitenrand angeführt.

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur vom 4. Juli 2012, GZ 5.034/0004-B/8/2012, gemäß § 14 Abs. 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch für die 2. Klasse an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen und für den II. Jahrgang an höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage eines zielorientierten Lehrplans verfasst. Konkretisierung, Gewichtung und Umsetzung der Inhalte erfolgen durch die Lehrerinnen und Lehrer.

Schulbuchnummer: 160001

Bildquellen: Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB) Wien (186, 188); Birgit Steininger (169); Der Zahlenteufel, © 1997 Carl Hanser Verlag, München – Wien, Zeichnung von Rotraut Susanne Berner (276); Deutsches Museum München (80); Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze, © by Rowohlt Verlag GmbH, Reinbek b. Hamburg (193); Fotolia.com: © Alexandre (116), © Andrei Kazarov (35), © ania_jp (112/Henne), © Arnold (298), © ARochau (55), © Astro (283), © Ayvengo (240), © biamiti (112/Elefant), © Carola Schubbel (112/Hase), © Chris Bett (106/4.105), © daboost (214), © davidundderriese (44), © Dmitry Pichugin (105), © flashpics (18), © fotogestoeber (258), © Gordon Bussiek (138), © Guillaume Tunzini (289/11.78), © Hulli (57), © imaginando (124), © JiSIGN (259/mitte), © Junede (172), © justaa (259/oben), © K.-U. Häßler (106/4.103), © Kadmy (256), © losw (259/unten), © MAK (278, 297), © markus dehlzeit (236), © Murat Subatli (69), © NJ (112/Wal), © Petr Mašek (112/Schwein), © Pieter Bregman (112/Katze), © pink candy (244), © pmphoto (151), © Rainer Plendl (255), Fotolia.com: © Raphaelle Wavrant (112/Hund), © Reinhold Stansich (250), © scusi (96), © Sven Hoppe (78), © terex (76), © VectorShots.com (222), © Vitaly Rozhkov (295), © Volkan Gürgen (286), © Yuriy Mazur (109); Geologische Bundesanstalt Wien (228); Janosch A. Slama (216, 226/oben); König Karl II von England: Gemälde von Sir Peter Lely/Wikimedia Commons (293); Mario Merz: Fibonacci Reihe, 2000 Zentrum für Internationale Lichtkunst Unna, Foto: Werner J. Hannappel, Essen (277); Monatsschrift Kinderheilkunde 8/2001 (268); Popeye-Zeichnung von Elzie Crisler Segar aus: Popeye-Comicstrip vom 6. November 1936 (296/oben); Richard Hofstädter (289/11.77); Uli Sax (95); alle übrigen von den Autorinnen und Autoren. In Fällen freier Werknutzung: Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK, Wien 2013

1. Auflage 2013 (1,00)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Peter Barosch KG, 1220 Wien
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH & Co. KG, 2752 Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-03552-3

Bestellschein

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Zu diesem Schulbuch gibt es ein Lösungsheft, das die Lösungen zu den Aufgaben dieses Buchs enthält.

Als Ergänzung zu den im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben und Problemstellungen gibt es 4 Zusatzhefte, die ausführlich dokumentierte technische Anwendungen enthalten und jeweils verschiedene Fachrichtungen berücksichtigen – siehe Bestellabschnitt. In den Zusatzheften sind die Lösungen der dort enthaltenen Aufgaben integriert.

Bitte gib den ausgefüllten und unterschriebenen Bestellabschnitt in deiner Buchhandlung ab oder bestelle direkt beim Verlag:

Adresse: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Frankgasse 4, 1090 Wien
Tel.: 01/403 77 77
E-mail: service@verlaghpt.at

Fax: 01/403 77 77 DW 77

Hiermit bestelle ich mit Rechnung:

Lösungen zu Band 2 (Neu nach Lehrplan 2011)

_____ Expl. Lösungen zu Band 2 (LP 2011) (ISBN 978-3-230-03554-7)*

*) € 9,70 inkl. Porto und Verpackung

Zusatzhefte zu Band 2

_____ Expl. Zusatzheft für Bautechnik sowie Innenraumgestaltung und Holztechnik (SBNR 145334)**

_____ Expl. Zusatzheft für Elektrotechnik und Elektronik (SBNR 145335)**

_____ Expl. Zusatzheft für Maschineningenieurwesen, Mechatronik und Werkstoffingenieurwesen (SBNR 145336)**

_____ Expl. Zusatzheft für Wirtschaftsingenieurwesen, Betriebsmanagement, EDV und Organisation, Chemie, Chemieingenieurwesen und Lebensmitteltechnologie sowie Kunst und Design (SBNR 145337)**

**) jeweils € 9,90 inkl. Porto und Verpackung

Für alle Angebote gilt: Preisänderungen vorbehalten

Bitte gib deinen Namen und deine Adresse an:

Name:

____

____

Adresse:

____

____

____

Datum und Unterschrift:

____
(bei Minderjährigen des Erziehungsberechtigten)

Inhaltsverzeichnis

1	**Funktionen**	**5**
1.1	Wiederholung	5
1.2	Eigenschaften von Funktionen	6
1.3	Umkehrfunktionen	11
	Zusammenfassung	14
	Weitere Aufgaben	15
	Wissens-Check	17
2	**Potenzen und Potenzfunktionen**	**18**
2.1	Wiederholung: Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	18
2.2	Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzeln	19
2.3	Potenzfunktionen	28
2.4	Polynomfunktionen	32
2.5	Wurzelfunktionen	34
2.6	Wurzelgleichungen	37
	Zusammenfassung	39
	Weitere Aufgaben	40
	Wissens-Check	43
3	**Quadratische Funktionen und Gleichungen**	**44**
3.1	Quadratische Funktionen	44
3.2	Quadratische Gleichungen	58
	Zusammenfassung	71
	Weitere Aufgaben	71
	Wissens-Check	77
4	**Exponential- und Logarithmusfunktionen**	**78**
4.1	Exponentialfunktionen	78
4.2	Logarithmus	97
4.3	Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen	102
4.4	Logarithmische Funktionen und Skalen	110
4.5	Hyperbelfunktionen und Areafunktionen	116
	Zusammenfassung	118
	Weitere Aufgaben	119
	Wissens-Check	123
5	**Trigonometrie**	**124**
5.1	Die Winkelfunktionen	124
5.2	Berechnungen im allgemeinen Dreieck	138
5.3	Goniometrische Beziehungen	148
5.4	Allgemeine Winkelfunktionen	151
5.5	Goniometrische Gleichungen	161
	Zusammenfassung	165
	Weitere Aufgaben	166
	Wissens-Check	171
6	**Kurvendarstellungen**	**172**
6.1	Kurven in Polarkoordinaten	172
6.2	Kurven in Parameterdarstellung	176
	Zusammenfassung	184
	Weitere Aufgaben	184
	Wissens-Check	185
7	**Komplexe Zahlen**	**186**
7.1	Imaginäre Zahlen	186
7.2	Die Menge der komplexen Zahlen	188
7.3	Die Grundrechnungsarten in $\mathbb{C}$	196
7.4	Potenzen komplexer Zahlen	204
7.5	Lösen von Gleichungen in $\mathbb{C}$	207
	Zusammenfassung	211
	Weitere Aufgaben	212
	Wissens-Check	213

Inhaltsverzeichnis

8 Vektoren ... 214
8.1 Wiederholung der Grundbegriffe ... 214
8.2 Normalvektoren ... 215
8.3 Das Skalarprodukt zweier Vektoren ... 216
8.4 Vektoren im Raum ... 222
8.5 Vektorprodukt (Vektorielles Produkt, Kreuzprodukt) ... 226
8.6 Geraden in der Ebene ... 232
8.7 Geraden und Ebenen im Raum ... 236
Zusammenfassung ... 238
Weitere Aufgaben ... 238
Wissens-Check ... 239

9 Matrizen und Determinanten ... 240
9.1 Definitionen ... 240
9.2 Rechnen mit Matrizen ... 242
9.3 Anwendungen der Matrizenrechnung ... 250
Zusammenfassung ... 254
Weitere Aufgaben ... 254
Wissens-Check ... 257

10 Statistik ... 258
10.1 Beschreibende Statistik ... 258
10.2 Kennzahlen statistischer Verteilungen ... 265
Zusammenfassung ... 273
Weitere Aufgaben ... 273
Wissens-Check ... 275

11 Folgen und Reihen ... 276
11.1 Einführung ... 276
11.2 Arithmetische Folgen und Reihen ... 278
11.3 Geometrische Folgen und Reihen ... 283
11.4 Zinsrechnung ... 290
Zusammenfassung ... 294
Weitere Aufgaben ... 294
Wissens-Check ... 295

12 Fehlerrechnung ... 296
12.1 Grundbegriffe ... 296
12.2 Zahlen beschränkter Genauigkeit ... 297
12.3 Absoluter und relativer Fehler ... 298
12.4 Fehlerfortpflanzung ... 299
Zusammenfassung ... 303
Weitere Aufgaben ... 303
Wissens-Check ... 303

TE

Technologieeinsatz ... 304
MathCad – Kurzeinführung ... 304

Zusammenfassung wichtiger Formeln ... 306

Sachwortverzeichnis ... 316

Die grün gekennzeichneten Abschnitte sind an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen laut Lehrplan 2007 erst in der 3. Klasse vorgesehen.

Die rot gekennzeichneten Abschnitte sind an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen laut Lehrplan 2007 im Mathematikunterricht nicht vorgesehen.

Funktionen

Technische oder wirtschaftliche Zusammenhänge werden oft in Form von Funktionen mathematisch erfasst. Kennt man die Eigenschaften verschiedener Funktionstypen, lässt sich im Anwendungsfall das Arbeiten mit diesen Funktionen erleichtern. So ist es oft von Interesse, ob eine Funktion steigt oder fällt oder an welcher Stelle sie einen maximalen bzw. minimalen Wert annimmt.

Diese und weitere Eigenschaften sollen nun genauer untersucht werden.

1.1 Wiederholung

1.1 In einer Badewanne befinden sich 105 Liter Wasser. Nachdem das Abflussventil geöffnet wurde, fließen pro Minute 15 Liter Wasser durch den Abfluss ab. ABC

1) Gib eine Formel für die noch vorhandene Wassermenge W (in Liter) nach der Zeit t (in Minuten) an.
2) Erstelle eine Wertetabelle für die Wassermenge in der Badewanne von 0 Minuten bis 8 Minuten in 1-Minuten-Schritten.
3) Wie lang dauert es, bis die Badewanne leer ist? Welche Werte für t kannst du in die Funktionsgleichung sinnvollerweise einsetzen? Wie nennt man die Menge aller sinnvollen Werte für t?
4) Welche Werte für die Wassermenge W ergeben sich daraus?
5) Trage die sinnvollen Wertepaare in ein Diagramm ein und zeichne den Graphen.
6) Welche besondere Form hat der Funktionsgraph?

Eine **Funktion f** ist eine Zuordnung, die **jedem** Element **x** der Definitionsmenge D_f **genau ein** Element **y** der Wertemenge W_f **zuordnet**.

Einander zugeordnete Werte bilden Wertepaare; sie können in einer **Wertetabelle** aufgelistet werden.

Als Punkte in einem Koordinatensystem veranschaulicht bilden sie einen **Funktionsgraphen**.

Wird die Zuordnung durch eine Formel angegeben, spricht man von einer **Funktionsgleichung** $y = f(x)$.

In diesem Band werden verschiedene Funktionstypen mit gemeinsamen Eigenschaften untersucht. Der einfachste Funktionstyp ist die lineare Funktion.

Funktionen mit einer Funktionsgleichung der Form $\mathbf{y = k \cdot x + d}$ heißen **lineare Funktionen**.
Der Funktionsgraph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

1.2 Stelle die Zuordnungen grafisch dar und gib jeweils an, ob es sich um eine Funktion handelt. Begründe deine Antwort. BCD

a) 1) $y = 2x + 1$ ***2)*** $x = 2$ ***3)*** $y = 0$

b) 1)

x	−1	0	1	2
y	2	0	3	5

2)

x	−1	0	1	2
y	3	0	3	5

3)

x	3	0	3	5
y	−1	0	1	2

1.2 Eigenschaften von Funktionen

Besondere Punkte und wichtige Eigenschaften helfen, das Wesentliche einer Funktion zu erfassen und zu beschreiben.

Nullstellen

Die **Nullstelle** einer Funktion f ist jene Stelle, an der der Funktionswert null ist, also $f(x) = 0$ gilt. Sie ist daher die x-Koordinate des Schnittpunkts oder des Berührpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

ZB: Berechnung der Nullstelle von $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

$$0 = -\frac{1}{3}x + 2 \;\Rightarrow\; \text{Nullstelle } x = 6 \;\Rightarrow\; N(6|0)$$

Lineare Funktionen mit einer Steigung $k \neq 0$ haben genau eine Nullstelle, nichtlineare Funktionen können auch mehrere Nullstellen haben. Falls die Gleichung $f(x) = 0$ (noch) nicht lösbar ist, lassen sich die Nullstellen näherungsweise auch durch Ablesen aus der grafischen Darstellung ermitteln.

N(6|0)

$N_1(-3|0)$ $N_2(2|0)$ $N_3(5|0)$

Minimum, Maximum

Ein **lokales Minimum** einer Funktion ist der tiefste Punkt in seiner Umgebung, das heißt, die Funktionswerte unmittelbar vor und nach dem Minimum sind größer als an dieser Stelle. Dieser Punkt wird auch **Tiefpunkt** T genannt.

Ein **lokales Maximum** einer Funktion ist der höchste Punkt in seiner Umgebung, das heißt, die Funktionswerte unmittelbar vor und nach dem Maximum sind kleiner als an dieser Stelle. Dieser Punkt wird auch **Hochpunkt** H genannt.

In jedem lokalen Minimum oder Maximum gibt es eine waagrechte Gerade, die die Funktion in diesem Punkt berührt (waagrechte Tangente).

Ist ein lokales Minimum nicht nur der tiefste Punkt in seiner Umgebung, sondern auch der tiefste Punkt der gesamten Funktion, so ist es zusätzlich ein **globales Minimum**.

Ist ein lokales Maximum nicht nur der höchste Punkt in seiner Umgebung, sondern auch der höchste Punkt der gesamten Funktion, so ist es zusätzlich ein **globales Maximum**.

Man spricht beim kleinsten oder größten Wert einer Funktion auch vom **Extremum** (**Extremwert**) einer Funktion.

lokales und globales Maximum

lokales Maximum

lokales Minimum

lokales und globales Minimum

Fixpunkte

Ein **Fixpunkt** einer Funktion ist ein Punkt, dessen x- und y-Koordinate gleich sind. Grafisch erhält man ihn als Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der **1. Mediane**. Das ist jene Gerade, deren Punkte jeweils gleiche x- und y-Koordinate haben. Die Funktionsgleichung der 1. Mediane lautet also $y = x$. Sie verläuft durch den Koordinatenursprung und hat die Steigung $k = 1$.

ZB: Berechnung des Fixpunkts von $y = -3x + 1$:

$$x = -3x + 1 \;\Rightarrow\; \text{Fixwert } x = y = \tfrac{1}{4} \;\Rightarrow\; \text{Fixpunkt } F\left(\tfrac{1}{4}\middle|\tfrac{1}{4}\right)$$

Monotonie

Um Aussagen über das Verhalten einer Funktion treffen zu können, ist es oft von Bedeutung, ob eine Funktion steigt oder fällt. Steigt eine Funktion an, wenn sie in positiver x-Richtung durchlaufen wird, so heißt sie streng monoton steigend. Ist sie dabei auch stellenweise konstant, so ist sie nur monoton steigend. Analoges gilt für abnehmende Funktionswerte, also fallende Funktionen. Mathematisch ausgedrückt gilt:

Eine Funktion heißt
streng monoton steigend, wenn $x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$ bzw.
streng monoton fallend, wenn $x_1 < x_2 \;\Leftrightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.

ZB: Die dargestellte Funktion lässt sich in drei Monotoniebereiche einteilen, die Änderung der Monotonie erfolgt am Hoch- bzw. Tiefpunkt:
① $]-\infty; -1[$: streng monoton steigend
② $]-1; 1[$: streng monoton fallend
③ $]1; \infty[$: streng monoton steigend

Symmetrie

Gerade Funktion

Eine Funktion, die symmetrisch zur y-Achse ist, nennt man **gerade Funktion**.

Es gilt: $f(x) = f(-x)$

Ungerade Funktion

Eine Funktion, die punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist, nennt man **ungerade Funktion**.

Es gilt: $f(x) = -f(-x)$

Periodizität

Eine Funktion heißt **periodisch** mit der Periode p, wenn $f(x + p) = f(x)$ gilt. Das heißt, dass sich die Funktionswerte jeweils im Abstand p wiederholen.

ZB: Die abgebildete Funktion hat die Periode $p = 2\pi$.

Polstellen

Wie bei Termen kann auch bei Funktionsgleichungen die Variable im Nenner auftreten, zB $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Die Variable darf dann nur jene Werte annehmen, die auf sinnvolle Funktionswerte führen. Daher ist x = 2 nicht in der Definitionsmenge enthalten. Stellt man den Funktionsgraphen dar, so erkennt man, dass die Funktionswerte bei Annäherung an die Stelle x = 2 ins „Unendliche" fallen bzw. wachsen. Der Funktionsgraph nähert sich der senkrechten Geraden x = 2.

Eine Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist und die Funktionswerte ins positive bzw. negative Unendliche wachsen würden, nennt man **Polstelle** (**Pol**) oder **Unendlichkeitsstelle**.

Technologieeinsatz: Eigenschaften von Funktionen

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

TI-Nspire

Eine Funktion kann mithilfe der **Graphs**-Applikation dargestellt werden. Spezielle Punkte der Funktion können im Menü **6: Graph analysieren** ermittelt werden.

Sollen die Nullstellen einer Funktion ermittelt werden, so wählt man **1: Nullstelle**. Anschließend muss ein Bereich angegeben werden, in dem die Nullstelle liegt. Dieser wird durch die „Untere Schranke?" und die „Obere Schranke?" durch Anklicken festgelegt. Die Nullstelle wird danach als Punkt ausgegeben. Dieser Vorgang kann mehrmals durchgeführt werden.

Um ein lokales Minimum oder Maximum zu ermitteln, wählt man **2: Minimum** bzw. **3: Maximum**. Auch hier muss wieder ein Bereich vorgegeben werden. Der Tief- bzw. Hochpunkt wird dann als Punkt angezeigt.

Liegt im ausgewählten Bereich kein lokaler Extremwert, so wird der größte bzw. kleinste Wert des Bereichs angegeben, der am Rand des Bereichs liegt.

1.3 Treffen folgende Aussagen auf die dargestellte Funktion zu? Begründe deine Antworten.

D

1) Die Funktion hat an der Stelle $x = -1$ ein lokales Minimum.
2) Die Funktion ist im Bereich $]-3; \infty[$ streng monoton steigend.
3) Der Punkt $F(1|1)$ ist der einzige Fixpunkt.
4) Die Funktion hat zwei Nullstellen.
5) Es handelt sich um eine gerade Funktion.
6) Der Funktionswert an der Stelle $x = 2$ beträgt $y = 6$.
7) Es handelt sich um eine lineare Funktion.

1.4 Ergänze die Sätze in Bezug auf die dargestellte Funktion:

C

1) Die Funktion ist im Bereich $[1; 2]$ streng monoton ...
2) Die Funktion steigt streng monoton im Bereich ...
3) Sie hat in $x = -2$ ...
4) Sie hat in $x = 6$ ...
5) Der Punkt $P(3|3)$ ist ...
6) Der Punkt $P(3|3)$ ist auch ...

1.5 Zeichne die Funktion $y = 4x - 1$. Berechne und markiere die Nullstelle und den Fixpunkt.

B

1.6 ***1)*** Gib an, ob die Funktion symmetrisch ist und gib gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

BC

2) Gib an, ob die Funktion periodisch ist. Wenn ja, gib die Periode p an.
3) Bestimme Nullstellen, Tief- bzw. Hochpunkte und das Monotonieverhalten durch Ablesen aus der Grafik.

a)

b)

1.7 ***1)*** Stelle die Funktion $y = x^2 - 3$ mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar.
2) Bestimme Nullstellen sowie lokale Minima bzw. Maxima durch Ablesen aus der Grafik.
3) Gib an, ob die Funktion symmetrisch ist und gib gegebenenfalls die Art der Symmetrie an. Begründe deine Entscheidung anschaulich und rechnerisch.

BCD

TE

Mathcad, GeoGebra: www.verlaghpt.at

Lösung mit TI-Nspire:

1) und ***2)***
Nullstellen: $x_1 \approx -1{,}73$, $x_2 \approx 1{,}73$
Tiefpunkt: $T(0|-3)$

3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse, die Funktion also gerade ist.
Rechnerische Begründung:
$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$

1.8 Verwende die Angabe aus Aufgabe **1.7**.

BCD

TE

a) $y = x^3 + 2x + 4$ ***b)*** $f(x) = x^2 + x - 1$ ***c)*** $f(x) = 4x^3$ ***d)*** $y = -x^2 + 2$

Funktionen

BC **1.9** Ermittle mithilfe von Technologieeinsatz die Fixpunkte der Funktion $f(x) = x^3 - x + 1$. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

ABD **1.10** Eine Funktion hat in $x = 4$ eine Nullstelle und in $H(3|2)$ einen Hochpunkt. Skizziere einen möglichen Graphen der Funktion, wenn sie ***1)*** gerade, ***2)*** ungerade ist.
Welche weiteren Punkte können eingezeichnet werden, um den Verlauf der Kurve skizzieren zu können?

BC **1.11** ***1)*** Erstelle für folgende Funktion eine Wertetabelle von $x = -3$ bis $x = 3$ in Einerschritten.
2) Gib an, welche Eigenschaften du aus der Tabelle ablesen kannst.
3) Zeichne den Funktionsgraphen und vergleiche den Verlauf mit den Eigenschaften aus ***2)***.

a) $y = x^2 - 1$ ***b)*** $y = x^3$

BC **1.12** Gib, falls vorhanden, die Polstellen der gegebenen Funktion an. Überprüfe durch eine grafische Darstellung.

1) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ ***2)*** $g(x) = \frac{x - 3}{2}$ ***3)*** $h(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$ ***4)*** $k(x) = \frac{(x - 3)^2}{x - 3}$

C **1.13** Die dargestellte Funktion zeigt den Gewinn G (in Geldeinheiten = GE) eines Produkts in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl x. Beantworte folgende Fragen:
1) Bei welcher Stückzahl wird der größte Gewinn erreicht? In welchem Punkt der Funktion kannst du diesen ablesen?
2) Ab wie vielen Stück wird Gewinn erzielt? Welcher Stelle der Funktion entspricht dieser Wert?
3) In welchem Bereich nimmt der Gewinn ab?
4) In welchen Bereichen wächst der Gewinn?
5) Welcher Gewinn wird bei 600 Stück erzielt?
6) Wie viele Stück müssen zirka verkauft werden, um einen Gewinn von 100 GE zu erzielen?

ACD **1.14** Der abgebildete Funktionsgraph zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer Motorradfahrt.
1) Beschreibe die Fahrt mit eigenen Worten. Welche Situation könnte sie darstellen?
2) Beantworte folgende Fragen:
A) Nach welcher Zeit wird die maximale Geschwindigkeit erstmals erreicht?
B) In welchem Zeitbereich beschleunigt das Motorrad?
C) In welchem Zeitbereich nimmt die Geschwindigkeit ab?
D) Wann fährt das Motorrad mit konstanter Geschwindigkeit?
E) Wie schnell ist das Motorrad nach 20 Sekunden?
F) Wann erreicht es eine Geschwindigkeit von 30 $\frac{km}{h}$?

3) Arbeitet zu zweit. Sucht jeweils eine Sportart aus, für die ihr ein charakteristisches Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm darstellen könnt. Zeichnet dieses auf und tauscht es aus. Beschreibt das Diagramm und erratet die Sportart.

1.3 Umkehrfunktionen

1.3.1 Umkehrung von Zusammenhängen

1.15 Ein 120 cm hohes Aquarium wird gleichmäßig mit Wasser bis 20 cm unter den Rand befüllt. Zu Beginn der Füllung steht das Wasser bereits 10 cm hoch. Die jeweilige Wasserstandshöhe h (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) nach Beginn der Füllung lässt sich durch die Funktion $h(t) = 3\,\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot t + 10\text{ cm}$ berechnen. ABC

1) Gib an, welche Definitionsmenge sinnvoll ist. Erstelle eine Wertetabelle für die Höhe des Wasserstands in 5-Minuten-Schritten und zeichne den Graphen. Welche Werte für die Wasserstandshöhe ergeben sich?
2) Forme die Funktionsgleichung nach t um.
3) Erstelle eine Wertetabelle für die Fülldauer des Aquariums bei einer Wasserstandshöhe von h = 10 cm bis h = 100 cm in 10-cm-Schritten.
4) Gib die Definitionsmenge und die Wertemenge für die Funktion t(h) an.
5) Zeichne den neuen Graphen in ein neues Koordinatensystem ein und vergleiche diesen Funktionsgraphen mit dem ursprünglichen.

Ist der Zusammenhang zwischen zwei Größen als Funktion gegeben, kann man der unabhängigen Variablen immer eindeutig einen Funktionswert zuordnen. In vielen Fällen ist es auch möglich, den umgekehrten Weg zu gehen.
Zum Beispiel lässt sich bei einem fallen gelassenen Stein aus der Fallzeit der zurückgelegte Weg berechnen. Wir können eine Funktion angeben, die jeder Zeit einen bestimmten Fallweg zuordnet.
Umgekehrt lässt sich, wenn der Fallweg bekannt ist, die zugehörige Fallzeit berechnen. Die so entstandene Funktion nennt man **Umkehrfunktion**.

Die Umkehrung ist nicht immer eindeutig möglich. Zum Beispiel lässt sich bei einem nach oben geworfenen Stein, der anschließend hinunter fällt, aus der Flugzeit die Höhe berechnen. Umgekehrt gibt es, wenn die Höhe bekannt ist, zwei mögliche Flugzeiten. Die Zuordnung Höhe ⟶ Zeit ist also nicht eindeutig möglich. Sie ist eine Relation, die **Umkehrrelation**.

1.16 Ein Radfahrer fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zurückgelegte Weg s (in km) abhängig von der Zeit t (in Stunden) lässt sich durch die Funktion $s(t) = 12\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$ berechnen. ABC

1) Erstelle eine Wertetabelle für den zurückgelegten Weg für t = 0,5 h bis t = 3 h in 0,5-Stunden-Schritten und zeichne den Graphen.
2) Forme die Funktionsgleichung nach t um und erstelle eine Wertetabelle für s = 0 km bis s = 36 km in 4-km-Schritten.
3) Zeichne den neuen Graphen in ein neues Koordinatensystem ein und vergleiche diesen Funktionsgraphen mit dem ursprünglichen.

1.3.2 Darstellung von Umkehrfunktionen

BC **1.17** Zeichne auf eine Overheadfolie mithilfe einer Wertetabelle die Funktion $y = x^2$ im Bereich [0; 4]. Wähle als Einheit 1 cm.

1) Halte die Folie links unten und rechts oben fest. Drehe sie so um, dass die linke obere und die rechte untere Ecke Platz tauschen.

2) Welche Funktion wird nun dargestellt?

ZB: Die Umkehrfunktion der Funktion $y = 2x + 5$ soll ermittelt werden.
Wir erstellen eine Wertetabelle im Bereich [−3; 2]. Um die Umkehrfunktion zu erhalten, werden die x- und y-Werte vertauscht.

x	y
−3	−1
−2	1
−1	3
0	5
1	7
2	9

x	y
−1	−3
1	−2
3	−1
5	0
7	1
9	2

An der grafischen Darstellung sieht man, dass die Verbindungsstrecke der beiden Punkte P(1|7) und S(7|1) normal auf die 1. Mediane steht. Das heißt, das Vertauschen der x- und y-Koordinaten entspricht der Spiegelung an der 1. Mediane.

Damit man die Umkehrung wieder als Funktionsgleichung mit der unabhängigen Variablen x angeben kann, werden auch hier die Variablen getauscht.

Wir ermitteln nun die Gleichung der gespiegelten Funktion.

$y = 2x + 5$ • Vertauschen der beiden Variablen x und y.

$x = 2y + 5 \Rightarrow y = \frac{x-5}{2}$ • Durch explizites Ausdrücken von y erhält man die Umkehrfunktion.

Grafisch erhält man die Umkehrung durch Spiegelung des Funktionsgraphen an der 1. Mediane. Ist die Zuordnung eindeutig, so erhält man die Umkehrfunktion, andernfalls die Umkehrrelation. Das Spiegeln einer Funktion ist aber nicht sinnvoll, wenn x- und y-Koordinaten verschiedene Einheiten haben.

ZB: Die Umkehrrelation der Funktion $y = x^2$ soll ermittelt werden.
Wir erstellen eine Wertetabelle im Bereich [−2; 2]. Um die Umkehrrelation zu erhalten, werden die x- und y-Werte vertauscht.

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

x	y
4	−2
1	−1
0	0
1	1
4	2

Der gespiegelte Graph stellt hier keine Funktion dar, sondern eine Relation, da zu jedem $x > 0$ zwei y-Werte existieren. Wenn wir den Definitionsbereich von $y = x^2$ auf $\mathbb{R}_0^+$ einschränken, ist die Umkehrrelation eine Funktion, da nun zu jedem $x \geq 0$ genau ein y-Wert existiert: $y = +\sqrt{x}$

Wir überlegen anhand zweier Beispiele, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit die Umkehrrelation einer Funktion wieder eine Funktion ist.

$f(2) = 3 \neq f(4) = 4$

$y = f(2) = f(6) = 2$

Zu $y = 2$ ist der x-Wert nicht mehr eindeutig ermittelbar, da es zwei x-Werte gibt.

Haben verschiedene x-Werte immer verschiedene Funktionswerte, gilt also $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, dann ist die Umkehrrelation wieder eine Funktion.

In der Grafik erkennt man: Wird der Graph einer Funktion von allen Parallelen zur x-Achse höchstens einmal geschnitten, dann ist die Umkehrrelation eine Funktion. Für Funktionen, die streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend sind, gilt das immer.

Die Funktion $y = f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f ordnet jedem x eindeutig ein y zu. Kann umgekehrt auch jedem y eindeutig ein x zugeordnet werden, so entsteht die **Umkehrfunktion** von f (oft geschrieben als f^{-1}).
Ist der Graph einer Funktion f im gesamten **Definitionsbereich streng monoton steigend** bzw. **streng monoton fallend**, dann ist die **Umkehrrelation** eine **Funktion**.

1.18 Zeichne die Funktion $y = \frac{1}{3}x + 2$ in ein Koordinatensystem und stelle die Umkehrrelation grafisch dar. Begründe, ob die Umkehrrelation eine Funktion ist; wenn ja, gib deren Funktionsgleichung an.

BD

Lösung:

- Die lineare Funktion wird mithilfe des y-Achsenabschnitts und der Steigung gezeichnet.
- Da der gespiegelte Graph wieder eine Gerade sein muss, genügt es, zwei Punkte zu ermitteln.
  Zum Beispiel bleibt der Punkt F(3|3) unverändert, da er auf der 1. Mediane liegt, also ein Fixpunkt ist. Als weiteren Punkt erhält man P(0|−6) durch Spiegeln von N(−6|0).

Die Umkehrrelation ist eine Funktion, da die ursprüngliche Funktion im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist.

$y = \frac{1}{3}x + 2$ — x und y vertauschen

$x = \frac{1}{3}y + 2$ — y ausdrücken

$f^{-1}: y = 3x - 6$ — Die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls eine lineare Funktion.

BD **1.19** Zeichne die skizzierte Funktion und spiegle sie an der 1. Mediane. Gib an, ob es sich bei der entstehenden Relation um eine Funktion handelt und begründe deine Antwort.

1) **2)** **3)** **4)**

Aufgaben 1.20 – 1.21. Zeichne jeweils die Funktion in ein Koordinatensystem und stelle die Umkehrrelation grafisch dar. Begründe, ob die Umkehrrelation eine Funktion ist; wenn ja, gib deren Funktionsgleichung an.

BD **1.20** **a)** $y = 5x$ **b)** $y = 2x - 1$ **c)** $y = -x + 1$ **d)** $y = 4$

BD **1.21** **a)** $y = x^2 + 2$ **b)** $y = x^2 - 3$ **c)** $y = \frac{x}{2}$ **d)** $y = \frac{2}{x + 3}$

ABCD **1.22** Für Rechtecke mit der Seitelänge a = 10 cm lässt sich durch Angabe der Seite b der Flächeninhalt eindeutig ermitteln.

1) Gib die Funktionsgleichung an, die der Seite b eines Rechtecks den Flächeninhalt A zuordnet. Erstelle eine Wertetabelle für den Flächeninhalt mit b = 10 cm bis b = 120 cm in 10-cm-Schritten und zeichne den Graphen.

2) Forme die Funktionsgleichung nach b um und erstelle eine Wertetabelle mit $A = 100\ cm^2$ bis $A = 1\,200\ cm^2$ in $100\text{-}cm^2$-Schritten.

3) Zeichne den neuen Graphen in ein neues Koordinatensystem ein. Warum ist es nicht sinnvoll, dasselbe Koordinatensystem zu verwenden?

4) Ist die Umkehrrelation eine Funktion? Wenn ja, gib den Funktionstyp an.

5) Vergleiche den Graphen der ursprünglichen Funktion mit dem neuen Graphen. Beschreibe die Unterschiede bzw. die Gemeinsamkeiten.

Zusammenfassung

Eine **Funktion f** ist eine **Zuordnung**, bei der **jedem** Element **x** aus einer Definitionsmenge **genau ein** Element **y** aus einer Wertemenge zugeordnet wird.

Eigenschaften von Funktionen
Nullstelle: $f(x) = 0$, x-Wert des Schnittpunkts mit der x-Achse
Minimum (**Tiefpunkt**): tiefster Punkt in seiner Umgebung
Maximum (**Hochpunkt**): höchster Punkt in seiner Umgebung
Fixpunkt: $f(x_F) = x_F$, Stelle und Funktionswert sind gleich
Monotonie: streng monoton steigend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Symmetrie: gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$ ... symmetrisch zur y-Achse
ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$ ... punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs
Periode p: $f(x + p) = f(x)$
Polstelle: Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist und bei Annäherung die Beträge der Funktionswerte „unendlich“ groß werden.

Zu einer Funktion existiert die **Umkehrfunktion**, wenn **verschiedene x-Werte immer verschiedene Funktionswerte** haben. Der Graph entsteht durch Spiegelung an der 1. Mediane.

Weitere Aufgaben

1.23 *1)* Gib an, ob die Funktion symmetrisch ist und gib gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

2) Gib an, ob die Funktion periodisch ist.

3) Gib, falls vorhanden, lokale Minima und Maxima an.

4) Lies die Nullstellen näherungsweise ab.

5) Gib jeweils die Bereiche an, in denen die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist.

BC

a) **b)** **c)** **d)** **e)** **f)**

1.24 *1)* Stelle die gegebene Funktion grafisch dar.

2) Bestimme aus der Grafik Nullstellen, Fixpunkte sowie Hoch- und Tiefpunkte.

3) Gib an, ob die Funktion symmetrisch ist und gib gegebenenfalls die Art der Symmetrie an. Begründe deine Entscheidung anschaulich und rechnerisch.

a) $y = \frac{1}{2}x^3$ **b)** $y = x^2 - 4$ **c)** $y = -x^4 + 5x^2 + 1$ **d)** $y = \frac{1}{20}x^3 - 2x$

BCD

TE

1.25 Die dargestellte Funktion gibt die Höhe h (in cm) des Wasserstands beim Befüllen eines Schwimmbeckens mit rechteckiger Grundfläche in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) an. Welche Aussagen stimmen nicht? Begründe deine Antworten.

1) Streng monoton steigende Bereiche bedeuten ein Füllen des Beckens.

2) Während der gesamten zweiten Stunde befindet sich kein Wasser im Becken.

3) Das Ablassen des Wassers erfolgt schneller als das Befüllen.

4) Nach 5,5 Stunden wird die maximale Füllhöhe erreicht.

5) Im Bereich 0 h bis 2 h ist die Funktion monoton steigend.

CD

1.26 Suche in einer Tageszeitung nach Diagrammen mit Funktionsgraphen (Börsenkurse, Wachstumsprognosen ...). Wähle eines aus und beschreibe die vorkommende Funktion, indem du ihre Eigenschaften angibst. Präsentiere deine Ergebnisse.

CD

Funktionen

D **1.27** Stimmen folgende Aussagen? Begründe deine Antwort.

1) Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ hat in $x = 0$ eine Nullstelle.
2) Die Funktion $y = x$ hat ausschließlich Fixpunkte.
3) Ist eine Funktion periodisch mit der Periode p, dann gilt: $f(x) = f(x + 2p)$
4) Es gibt eine lineare Funktion mit zwei Nullstellen.

BC **1.28** Ermittle die Polstellen der Funktion $y = \frac{1}{(x-2)\cdot(x+3)}$. Beschreibe deine Vorgehensweise und stelle die Funktion grafisch dar.

TE

BD **1.29** Zeichne die Funktion in ein Koordinatensystem und stelle die Umkehrrelation grafisch dar. Begründe, ob die Umkehrrelation eine Funktion ist. Wenn ja, gib deren Funktionsgleichung an.

a) $y = \frac{x+1}{2x-4}$ ***b)*** $y = \frac{1}{x} + 3$ ***c)*** $y = \frac{3x-2}{x+2}$ ***d)*** $y = x^2 - 1$

ABC **1.30** Ein Öltank enthält 300 Liter Heizöl. Der tägliche Verbrauch beträgt 15 Liter.

1) Gib die Funktionsgleichung an, die der Zeit t (in Tagen) die verbleibende Ölmenge V (in Liter) zuordnet. Wähle eine sinnvolle Definitionsmenge, erstelle eine Wertetabelle und zeichne den Graphen.
2) Forme die Funktionsgleichung nach t um.
3) Gib Definitions- und Wertemenge der neuen Funktion an und erstelle eine Wertetabelle.
4) Zeichne den neuen Graphen in ein neues Koordinatensystem ein und vergleiche diesen Funktionsgraphen mit dem ursprünglichen.

ABC **1.31** Bei einer Stromquelle beträgt die Spannung 230 V. Der Widerstand R (in Ω) in Abhängigkeit von der Stromstärke I (in A) lässt sich durch die Funktion $R(I) = \frac{230\text{ V}}{I}$ berechnen.

1) Gib die Definitionsmenge an. Erstelle eine Wertetabelle in 2-Ampere-Schritten für R(I) und zeichne den Graphen. Gib die entstehende Wertemenge an.
2) Forme die Funktionsgleichung nach I um.
3) Gib Definitions- und Wertemenge der neuen Funktion an und erstelle eine Wertetabelle.
4) Zeichne den neuen Graphen in ein neues Koordinatensystem ein und vergleiche diesen Funktionsgraphen mit dem ursprünglichen.

ABD **1.32** Die kinetische Energie E (in Joule) einer gleichförmig bewegten Masse m = 4 kg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v (in $\frac{m}{s}$) lässt sich durch die Funktion $E(v) = \frac{m \cdot v^2}{2}$, $v \geq 0\,\frac{m}{s}$, beschreiben.

1) Erstelle eine Wertetabelle für die kinetische Energie bis $v = 30\,\frac{m}{s}$ in 5-$\frac{m}{s}$-Schritten und zeichne den Graphen.
2) Begründe, warum die Umkehrfunktion, die die Geschwindigkeit abhängig von der kinetischen Energie angibt, existiert. Gib deren Gleichung an und stelle den Funktionsgraphen dar.

Weitere Aufgaben in den Zusatzheften

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann verschiedene Eigenschaften von Funktionen angeben und beschreiben.	
2	Für eine Nullstelle einer Funktion gilt, dass ...	
3	Das lokale Minimum einer Funktion erkennt man daran, dass ...	
4	Ist der Funktionswert an einer Stelle immer kleiner als der Funktionswert an einer davor liegenden Stelle, so ist die Funktion streng monoton ...	
5	Ich kann eine gerade, periodische Funktion skizzieren.	
6	Einen Punkt einer Funktion, dessen x-Wert gleich dem y-Wert ist, nennt man ...	
7	In welchen der angegebenen Bereiche ist die dargestellte Funktion streng monoton steigend? A) $[-3; -2[$ C) $[-1; 0]$ E) $[3; 4]$ B) $]-\infty; -2[$ D) $]1; 4]$ F) $]1; 2]$	
8	Wie heißt eine Stelle, an der die Funktionswerte unendlich groß wären? Gib ein Beispiel an.	
9	Ich kann erklären, was eine Umkehrfunktion ist.	
10	Erkläre anhand der Funktion $y = 2x + 1$, wie die Umkehrfunktion grafisch und rechnerisch ermittelt werden kann.	
11	Gib für die dargestellten Funktionen an, ob die Umkehrrelation eine Funktion ist. Begründe deine Entscheidung. A) B) C)	
12	Gib je ein Beispiel für eine Funktion mit folgender Eigenschaft an: 1) Die Umkehrrelation ist keine Funktion. 2) Die Umkehrrelation ist eine Funktion, wenn man den Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion auf die negativen Zahlen einschränkt.	

Lösung:
1) siehe Seiten 6ff 2) $f(x) = 0$ ist. 3) siehe Seite 6 4) fallend. 5) siehe Aufgabe 1.23 d) 6) Fixpunkt 7) A), B), F) 8) Polstelle, zB: $y = \frac{1}{x}$ bei $x = 0$ 9) siehe Seiten 11ff 10) Grafisch erhält man die Umkehrfunktion durch Spiegelung des Funktionsgraphen an der 1. Mediane; rechnerisch werden die Variablen x und y ausgetauscht und dann wird nach y aufgelöst: $x = 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{2}$ 11) A) und C) Relation, da die Funktion sowohl monoton steigend als auch fallend ist, B) Funktion, die gegebene Funktion ist im gesamten Bereich streng monoton steigend 12) siehe Seite 12

2 Potenzen und Potenzfunktionen

In der Homöopathie werden Medikamente durch ihre Zusammensetzung und Konzentration bestimmt. Die Konzentration wird dabei in so genannten Dezimal-Potenzen (D-Potenzen) angegeben. Zum Beispiel gibt D6 eine Verdünnung auf 6 Zehnerpotenzen an, das heißt, die Verdünnung beträgt $1 : 10^6$. Die Verdünnung wird also mithilfe einer Potenz dargestellt.

Potenzen und Potenzfunktionen können viele Vorgänge und Prozesse in naturwissenschaftlichen, technischen und wirtschaftlichen Bereichen beschreiben.

2.1 Wiederholung: Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

BCD **2.1** Berechne $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^2}{-2^4 \cdot 2^{-2}}$. Gib an, welche Rechenregeln du dabei angewendet hast.

Potenzen wurden bereits in Band 1 behandelt. Zur Erinnerung werden hier Definitionen und Rechenregeln nochmals angeführt.

Definitionen von Potenzen $(a \neq 0)$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ mit $a^1 = a$ und $a^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Vorzeichenregel für Potenzen

$(-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ wenn n gerade ist} \\ -a^n, \text{ wenn n ungerade ist} \end{cases}$

Rechenregeln für Potenzen $(a, b \neq 0)$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

D **2.2** Ergänze jeweils die Rechenregel und formuliere sie mit eigenen Worten.
1) $a^{n+m} = \ldots$ **2)** $a^n \cdot b^n = \ldots$ **3)** $a^{n \cdot m} = \ldots$

B **2.3** Gib das Ergebnis als Potenz mit positivem Exponenten an.
a) $-(-2^{-5}) \cdot \frac{(-2^3) \cdot 2^{-3}}{(-2)^{-5}}$ **b)** $-1^0 \cdot (-1)^0 \cdot \frac{-1^{-3}}{-1^3}$ **c)** $(-4)^{-4} \cdot (-4^{-4}) : (-4^4) \cdot (-4)^{-3}$

B **2.4** Gib das Ergebnis mit positiven Exponenten an.
a) $(2d^2f^{-2}g)^3$ **b)** $(4^{-2}c^4d^{-3}k^7)^{-2}$ **c)** $(-5m^{-3}np^{11})^{-3}$

Aufgaben 2.5 – 2.7: Fasse die Terme so weit wie möglich zusammen. Gib das Ergebnis bruchfrei an.

B **2.5** **a)** $\left(-\frac{9z^{-1}}{16y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3y^3}{4z^{-2}}\right)^{-3}$ **b)** $\left(-\frac{2p^{-1}}{3q^3}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{3q}{2p^{-2}}\right)^{-4}$ **c)** $-\frac{2x^{-4}}{27c^{-6}} \cdot \left(-\frac{8c^{-2}}{3^{-1}x}\right)^{-3}$

B **2.6** **a)** $\left(\frac{3a^{-2}b}{2c^3}\right)^{-2}$ **b)** $(-8a^{-3})^{-3} \cdot \frac{1}{(-64a)^{-10}} \cdot \frac{1}{a^{-1}}$

B **2.7** **a)** $[-5^{-2} \cdot (u^{-2})^{-6}]^{-1} : [(-5u^{-4})^3]^{-2}$ **b)** $[-3^{-5} \cdot (-a^{-1})^{-3}]^{-2} : [-(-3a^{-4})^{-2}]^{-4}$

2.2 Potenzen mit rationalen Exponenten – Wurzeln

2.2.1 Grundbegriffe

2.8 Gib drei Formeln an, in denen Wurzeln vorkommen.

A

In Band 1 haben wir die Definitionen von Quadratwurzel und Kubikwurzel sowie die Darstellung von Wurzeln in Potenzschreibweise kennen gelernt.

Man nennt die (nicht negative) Zahl b die **Quadratwurzel** von a, wenn gilt: $b^2 = a$, $(a \geqslant 0)$

$$b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Man nennt die Zahl b die **Kubikwurzel** von a, wenn gilt: $b^3 = a$

$$b = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

Diese Definition wird nun auf alle n-ten Wurzeln einer reellen Zahl erweitert. Dabei wird vorausgesetzt, dass alle notwendigen Bedingungen zur Berechnung dieser Wurzeln erfüllt sind.

n-te Wurzel aus a

Die nicht negative reelle Zahl b heißt $\sqrt[n]{a}$ [sprich: „n-te Wurzel aus a"], wenn $b^n = a$ ist $(a \in \mathbb{R}_0^+, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$.

Bezeichnungen: $b = \sqrt[n]{a}$ b ... Wurzel, n ... Wurzelexponent, a ... Radikand

Ist n ungerade, so gilt für negative Radikanden: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Ist n gerade, so sind negative Radikanden nicht zulässig.

Wurzeln in Potenzschreibweise:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Beachte, dass die Darstellung nicht eindeutig ist, zB:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[12]{a^8} \ldots$$

Allgemein gilt für $a \geqslant 0$: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{r \cdot m}{r \cdot n}} = \sqrt[r \cdot n]{a^{r \cdot m}}$

Die **Potenzschreibweise für Wurzeln** wird auch verwendet, wenn ein Taschenrechner nicht über eine Eingabetaste für die n-te Wurzel verfügt oder bei **Programmiersprachen** und **Anwenderprogrammen** wie zum Beispiel GeoGebra.

2.9 Ziehe die Wurzel im Kopf und überprüfe dein Ergebnis durch Potenzieren.

B

a) $\sqrt[3]{27}$ **b)** $\sqrt[5]{32}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$

Lösung:

a) $\sqrt[3]{27} = 3$, da $3^3 = 27$ **b)** $\sqrt[5]{32} = 2$, da $2^5 = 32$ **c)** $\sqrt[4]{625} = 5$, da $5^4 = 625$

2.10 Schreibe die Wurzel als Potenz mit rationalem Exponenten an.

B

a) $\sqrt[3]{11}$ **b)** $\sqrt[4]{5^3}$ **c)** $\sqrt[6]{\frac{1}{b}}$ **d)** $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

Lösung:

a) $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$ **c)** $\sqrt[6]{\frac{1}{b}} = \sqrt[6]{b^{-1}} = b^{-\frac{1}{6}}$ **d)** $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt[5]{3^{-2}} = 3^{-\frac{2}{5}}$

B **2.11** Schreibe die Wurzel als Potenz mit einer möglichst kleinen natürlichen Zahl als Basis an.

a) $\sqrt[18]{64}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{1}{36}}$

Lösung:

a) $\sqrt[18]{64} = \sqrt[18]{2^6} = 2^{\frac{6}{18}} = 2^{\frac{1}{3}}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{1}{36}} = \sqrt[4]{6^{-2}} = 6^{-\frac{2}{4}} = 6^{-\frac{1}{2}}$

BC **2.12** Ermittle im Kopf einen Schätzwert für die Wurzel. Dokumentiere deine Überlegungen.

a) $\sqrt{134}$ **b)** $\sqrt[4]{100\,000}$

Lösung:

a) Da $11^2 = 121$ und $12^2 = 144$ ist, muss gelten: $11 < \sqrt{134} < 12$.
Der geschätzte Wert für $\sqrt{134}$ ist zum Beispiel 11,5.

b) Ich wähle zwei Zahlen a und b so, dass ich a^4 und b^4 einfach berechnen kann, zB $a = 10$, $b = 20$.
$10^4 = 10\,000$ und $20^4 = 160\,000$, $\sqrt[4]{100\,000}$ muss „näher“ bei 20 liegen.
Der geschätzte Wert für $\sqrt[4]{100\,000}$ ist 18.

B **2.13** Ziehe die Wurzel im Kopf und begründe dein Ergebnis durch Potenzieren.

a) $\sqrt[5]{100\,000}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[8]{256}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{144}}$ **e)** $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

B **2.14** Schreibe die Potenz mit Wurzelzeichen an und berechne sie im Kopf.

a) $121^{\frac{1}{2}}$ **b)** $64^{\frac{1}{6}}$ **c)** $625^{\frac{1}{4}}$ **d)** $-27^{\frac{1}{3}}$ **e)** $0{,}25^{0{,}5}$ **f)** $625^{0{,}25}$

B **2.15** Schreibe die Potenz mit Wurzelzeichen an.

a) $k^{\frac{3}{4}}$ **b)** $b^{\frac{g}{h}}$ **c)** $(a+1)^{\frac{1}{2}}$ **d)** $(x-c)^{-\frac{2}{w}}$ **e)** $(a+b)^{-\frac{a}{b}}$ **f)** $(v-w)^{-\frac{c}{d}}$

B **2.16** Schreibe die Wurzel ohne Wurzelzeichen an.

a) $\sqrt[4]{f^3}$ **b)** $\sqrt[5]{a-b}$ **c)** $\sqrt[3]{(x+y)^4}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}}$ **f)** $\frac{1}{\sqrt{r+s}}$

B **2.17** Ermittle im Kopf einen Schätzwert für die Wurzel. Dokumentiere deine Überlegungen.

a) $\sqrt{1\,000}$ **b)** $\sqrt[3]{2\,000\,000}$ **c)** $\sqrt[3]{900}$ **d)** $\sqrt[4]{400}$ **e)** $\sqrt[4]{293}$ **f)** $\sqrt[5]{275}$

B **2.18** Schreibe die Wurzel als Potenz an, kürze den Exponenten und schreibe anschließend die Potenz wieder mit Wurzelzeichen an.

a) $\sqrt[4]{3^2}$ **b)** $\sqrt[6]{5^{10}}$ **c)** $\sqrt[8]{x^2}$ **d)** $\sqrt[9]{4^{12}}$ **e)** $\sqrt[15]{6^{10}}$ **f)** $\sqrt[21]{7^{18}}$

BC **2.19** Gib die Tastenfolge an, mit der du die Wurzel mit deinem Taschenrechner berechnen kannst und führe die Berechnung durch.

TE

a) $\sqrt[4]{5^8}$ **b)** $\sqrt[3]{2}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{3^7}}$ **e)** $\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[4]{3^3}$ **g)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt[6]{7^5}}$

CD **2.20** Was stimmt hier nicht?

$-3 = \sqrt[3]{-27} = (-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$

BC **2.21** Arbeitet zu zweit: Recherchiert, wie man ohne Taschenrechner Wurzeln berechnen kann. Eine(r) von euch verfasst eine Anleitung zur Berechnung der Quadratwurzel, eine(r) zur Berechnung der Kubikwurzel. Versucht anschließend, mithilfe der Anleitungen $\sqrt{678\,976}$ und $\sqrt[3]{50\,653}$ zu berechnen.

2.2.2 Rechnen mit Wurzeln

Addition und Subtraktion von Wurzeln

Vom Rechnen mit Termen ist bekannt, dass man nur Terme mit gleicher Basis und gleichem Exponenten addieren bzw. subtrahieren kann.

ZB: $3 \cdot \sqrt[5]{a^2} + 4 \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^2} \cdot (3 + 4) = 7 \cdot \sqrt[5]{a^2}$

Die Wurzel einer Summe (Differenz) entspricht nicht der Summe (Differenz) der Wurzeln.

ZB: $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$, aber $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

$\sqrt{16 + 9} = 5$ — $\sqrt{16 + 9}$ entspricht der Seitenlänge des Quadrats aus 16 + 9 Flächeneinheiten. Wir erhalten eine Seitenlänge von 5 Längeneinheiten.

$\sqrt{16} = 4$ — $\sqrt{16} = 4$ entspricht der Seitenlänge des gelben Quadrats mit 16 Flächeneinheiten.

$\sqrt{9} = 3$ — $\sqrt{9} = 3$ entspricht der Seitenlänge eines Quadrats mit 9 Flächeneinheiten.

Die Summe dieser Seitenlängen, 4 + 3 = 7, ist keinesfalls ident mit der Seitenlänge des großen Quadrats.

Addieren und **Subtrahieren** von Wurzeln ist nur möglich, wenn Radikand und Wurzelexponent gleich sind. Ist $a \neq b$, kann $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ aber **nicht** zusammengefasst werden.

Multiplikation und Division von Wurzeln bei gleichem Wurzelexponenten

Beispiel	Potenzschreibweise	Wurzelschreibweise
$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 7)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5 \cdot 7}$	$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{11}} = \frac{9^{\frac{1}{5}}}{11^{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{9}{11}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{9}{11}}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Das **Produkt** und der **Quotient** von Wurzeln **mit gleichem Wurzelexponenten** können mit gemeinsamem Wurzelzeichen angeschrieben werden:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

2.22 Berechne jeweils das Ergebnis im Kopf. Überlege zuerst, ob getrenntes Wurzelziehen oder vorheriges Multiplizieren besser ist und begründe deine Entscheidung mit eigenen Worten.

BD

1) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ **2)** $\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

Lösung:

1) Die Zahlen 4 und 9 sind Quadratzahlen, daher können die Wurzeln einzeln berechnet werden: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2) Durch das Zusammenfassen zu einer Wurzel kann so gekürzt werden, dass eine Quadratzahl entsteht: $\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Potenzen und Potenzfunktionen

Multiplikation und Division von Wurzeln mit gleichen Radikanden

Beispiel	Potenzschreibweise	Wurzelschreibweise
$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{4}{12}+\frac{3}{12}} = 5^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{5^7}$	$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$
$\frac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[4]{7}} = \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{4}}} = 7^{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}} = 7^{\frac{4}{20}-\frac{5}{20}} = 7^{\frac{-1}{20}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{20}}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{\frac{1}{7}}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{m-n}{m \cdot n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$

Das **Produkt** und der **Quotient** von Wurzeln **mit gleichen Radikanden** kann mit gemeinsamem Wurzelzeichen angeschrieben werden:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

B **2.23** Schreibe die Wurzeln zuerst als Potenzen an, vereinfache und gib das Ergebnis wieder in Wurzelschreibweise an: $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}}$

Lösung:

$$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{6}{12}} \cdot a^{\frac{8}{12}}}{a^{\frac{9}{12}}} = \frac{a^{\frac{14}{12}}}{a^{\frac{9}{12}}} = a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$$

Potenzieren und Radizieren (Wurzelziehen) von Wurzeln

Beispiel	Potenzschreibweise	Wurzelschreibweise
$(\sqrt[3]{2})^5 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{11}} = \left(11^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 11^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = 11^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{11}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7}} = 7^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$	$a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Für das **Potenzieren von Wurzeln** gelten die gleichen Rechenregeln wie für das Potenzieren von Potenzen. Bei Wurzeln von Wurzeln ist daher die Reihenfolge beliebig und sie können mit gemeinsamen Wurzelzeichen angeschrieben werden.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

B **2.24** Vereinfache und schreibe ***1)*** $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^7}}$ und ***2)*** $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ mit einem gemeinsamen Wurzelzeichen an.

Lösung:

1) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^7}} = \sqrt[5]{x^{\frac{7}{4}}} = x^{\frac{7}{20}} = \sqrt[20]{x^7}$ ***2)*** $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$

Partielles (Teilweises) Wurzelziehen bzw. Faktor unter die Wurzel bringen

Jede Zahl lässt sich sowohl in Potenzschreibweise als auch in Wurzelschreibweise auf mehrere Arten darstellen, zum Beispiel $5 = 5^{\frac{2}{2}} = 5^{\frac{3}{3}}$ … und $5 = \sqrt{5^2} = \sqrt[3]{5^3}$ …

Kann man den Term unter einer Wurzel so in Faktoren zerlegen, dass man aus mindestens einem Faktor die Wurzel ziehen kann, so spricht man von partiellem Wurzelziehen.
ZB: $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$

Umgekehrt lässt sich ein Faktor, der vor der Wurzel steht, unter die Wurzel bringen. ZB:

$5 \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{5^2 \cdot 3} = \sqrt[2]{75}$

- Um den Faktor 5 „unter die Quadratwurzel zu bringen“, muss 5 quadriert werden.

$2 \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}$

- Um den Faktor 2 unter die Kubikwurzel zu bringen, muss 2 mit 3 potenziert werden.

$v^2 \cdot \sqrt[4]{w^3} = \sqrt[4]{v^8 \cdot w^3}$

- Um den Faktor v^2 unter die 4. Wurzel zu bringen, muss v^2 mit 4 potenziert werden. $(v^2)^4 = v^8$

Wurzelausdrücke können vereinfacht werden:

Partielles Wurzelziehen →

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

← Faktor unter die Wurzel bringen

2.25 Vereinfache den Ausdruck durch partielles Wurzelziehen. B

a) $\sqrt[3]{189}$ **b)** $\sqrt{x^7}$

Lösung:

a) $\sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{7} = 3 \cdot \sqrt[3]{7}$

- Zerlegung in Primfaktoren: $189 = 3^3 \cdot 7$

b) $\sqrt{x^7} = \sqrt[2]{x^6 \cdot x} = \sqrt[2]{x^6} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{6}{2}} \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot \sqrt{x}$

- Es wird so faktorisiert, dass eine Hochzahl ein Vielfaches des Wurzelexponenten ist.

Rationalmachen von Nennern

Da Wurzeln im Allgemeinen irrationale Zahlen sind, können sie zum Beispiel am Taschenrechner nur auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen, also näherungsweise, dargestellt werden. Die daraus resultierenden Rundungsfehler können sich im Nenner eines Bruchs deutlich stärker als im Zähler auswirken. Man erweitert deshalb so, dass im Nenner eine rationale Zahl steht, zB:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  Da $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, wird der Bruch mit $\sqrt{2}$ erweitert.

- $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$

  Hat der Nenner die Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, so kann mithilfe der binomischen Formel geeignet erweitert werden.
  Allgemein gilt:
  $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

Brüche, in deren Nennern Wurzeln vorkommen, lassen sich oft durch geeignetes Erweitern mit rationalem Nenner darstellen. Durch das Rationalmachen der Nenner lassen sich viele Brüche vereinfachen bzw. kann die Division durch Wurzeln vermieden werden.

B **2.26** Stelle die Brüche mit rationalem Nenner dar.

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ **b)** $\frac{b}{\sqrt[5]{a^2}}$ **c)** $\frac{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Lösung:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$

- Die 3. Wurzel lässt sich berechnen, wenn der Radikand eine durch 3 teilbare Hochzahl hat.

b) $\frac{b}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{b}{\sqrt[5]{a^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{b\cdot\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{b\cdot\sqrt[5]{a^3}}{a}$

- Es wird so erweitert, dass die Hochzahl im Radikanden mit dem Wurzelexponenten gleich oder ein Vielfaches davon ist.

c) $\frac{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

$= \frac{(3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{9\cdot 2-3} = \frac{9\cdot 2+6\cdot\sqrt{6}+3}{15} =$

$= \frac{21+6\cdot\sqrt{6}}{15} = \frac{3\cdot(7+2\cdot\sqrt{6})}{15} = \frac{7+2\cdot\sqrt{6}}{5}$

- Erweitere mithilfe der binomischen Formel: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$ mit $a = 3\cdot\sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$

Bemerkung: Obwohl zum Beispiel bei $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ der Nenner zwar wurzelfrei, aber nicht rational ist, spricht man von Rationalmachen des Nenners.

D **2.27** In einer Formelsammlung aus dem vorigen Jahrhundert findet sich folgender Satz:
„Die Rechenregeln für Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten."
Welche zusätzliche Vereinbarung muss getroffen werden, damit dieser Satz gilt?

C **2.28** Gib alle Umformungsschritte an.

a) $\sqrt[n]{a^r}\cdot\sqrt[m]{a^s} = \sqrt[n\cdot m]{a^{r\cdot m+s\cdot n}}$ **b)** $\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[n]{a^s}} = \sqrt[m]{a^r}\cdot\sqrt[n]{a^{-s}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{r\cdot n-s\cdot m}}$

Aufgaben 2.29 – 2.30: Vereinfache soweit wie möglich bzw. begründe, falls dies nicht möglich ist.

BD **2.29** **a)** $\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{5}$ **c)** $6\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{5}$
b) $5\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}-5\cdot\sqrt{2}$ **d)** $10\cdot\sqrt{11}+10\cdot\sqrt{7}-10\cdot\sqrt{15}$

BD **2.30** **a)** $a^2\cdot\sqrt{2b}+a\cdot\sqrt{2b}-2a\cdot\sqrt{2b}$ **b)** $14\cdot\sqrt{ab}-3\cdot\sqrt{a}-9\cdot\sqrt{b}$

C **2.31** Entscheide, ob es besser ist, sofort die Wurzel zu ziehen oder zuerst zusammenzufassen. Dokumentiere deine Überlegungen, ohne die Rechnung durchzuführen.

1) $\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$ **2)** $\sqrt{0{,}36}\cdot\sqrt{100}$ **3)** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ **4)** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}$

Aufgaben 2.32 – 2.35: Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich.

B **2.32** **a)** $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ **c)** $\sqrt{20}\cdot\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt[5]{128}:\sqrt[5]{2}$

B **2.33** **a)** $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[7]{4}$ **b)** $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[11]{27}$ **c)** $\sqrt[8]{ab^2}\cdot\sqrt{ab^2}$ **d)** $\sqrt[12]{x^2y^3}\cdot\sqrt[5]{x^2y^3}$

B **2.34** **a)** $\sqrt[8]{18}:\sqrt[6]{18}$ **b)** $\sqrt[10]{2}:\sqrt[17]{2}$ **c)** $\sqrt[4]{b^2c}:\sqrt[3]{b^2c}$ **d)** $\sqrt[3]{u^4v^5}:\sqrt{u^4v^5}$

B **2.35** **a)** $5\cdot\sqrt{a}+\sqrt{9a}-\sqrt{8a}$ **b)** $x\cdot\sqrt{\frac{T}{x}}-T\cdot\sqrt{\frac{x}{T}}$

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

Technologieeinsatz: Potenzen und Wurzeln

TI-Nspire

Die Eingabe einer Potenz bzw. einer Wurzel erfolgt mithilfe der Tasten [^] [x²].

Eingabe	Ausgabe
$\sqrt{81}$	9
$\sqrt{50}$	$5\cdot\sqrt{2}$
$\sqrt{50}$	7.07107
$\sqrt{x^4}$	x^2
$\sqrt{x^{11}}$	$\sqrt{x^{11}}$

Wird die Wurzel einer (natürlichen) Zahl berechnet, so wird das Ergebnis möglichst einfach ausgegeben, wenn der Berechnungsmodus auf **Auto** oder **Exakt** eingestellt ist.

Durch Drücken von [ctrl] [enter] wird eine gerundete Dezimalzahl ausgegeben.

Bei Variablen wird nur in Spezialfällen vereinfacht.

Eingabe	Ausgabe
$\sqrt[3]{8}$	2
$\sqrt[3]{16}$	$2\cdot 2^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[5]{64\cdot x^6}$	$2\cdot 2^{\frac{1}{5}}\cdot x^{\frac{6}{5}}$
$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$	$\frac{1}{(x^3)^{\frac{1}{4}}}$
$x^{\frac{-3}{4}}$	$\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

Bei Eingabe einer n-ten Wurzel erscheint eine Eingabemaske, in der der Wurzelexponent und der Radikand eingegeben werden müssen.

Die Ausgabe erfolgt in Potenzschreibweise, wobei eventuell vereinfacht wird.

Potenzen mit Variablen werden nicht immer vereinfacht.

Wurzeln können auch als Potenzen eingegeben werden. Potenzen mit negativen Exponenten werden als Bruch mit positivem Exponenten dargestellt.

Brüche werden mit rationalem Nenner angegeben.

BD

2.36 Bei Eingabe des Terms $7^{-\frac{1}{4}}$ erhält man folgende Ausgabe:

Eingabe	Ausgabe
$7^{\frac{-1}{4}}$	$\frac{7^{\frac{3}{4}}}{7}$

Zeige durch eine Rechnung, dass beide Darstellungen ident sind und erkläre, welche Form am Taschenrechner ausgegeben wird.

Lösung:

$\frac{7^{\frac{3}{4}}}{7^1} = 7^{\frac{3}{4}-1} = 7^{-\frac{1}{4}}$

Da $7^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$ ist, wird der Bruch mit rationalem Nenner dargestellt.

BC **2.37** Welche Zahlen bzw. Ausdrücke haben den gleichen Wert wie $\sqrt{\frac{1}{100}}$? Verwende die Abbildung.

$\frac{1}{\sqrt{100}}$ $\quad$ 0,01 $\quad$ $\sqrt{10^{-2}}$ $\quad$ 0,1 $\quad$ 10 $\quad$ $\frac{1}{10}$

BCD **2.38** ***1)*** Berechne jeweils mit CAS.
2) Vergleiche die beiden Anzeigen. Beschreibe gegebenenfalls die Unterschiede.

A) $\sqrt{\sqrt{2}}$ und $\sqrt{\sqrt{a}}$ $\qquad$ ***B)*** $\sqrt[4]{9^5}$ und $\sqrt[4]{a^5}$ $\qquad$ ***C)*** $\sqrt[7]{x^5}$ und $\sqrt[8]{x^5}$

B **2.39** Vereinfache den Term. Gib das Ergebnis mit einem gemeinsamen Wurzelzeichen an.

a) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$ $\qquad$ ***c)*** $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$ $\qquad$ ***e)*** $\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^3}$ $\qquad$ ***g)*** $\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b) $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ ***d)*** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad$ ***f)*** $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ ***h)*** $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}$

B **2.40** Berechne die Potenz.

a) $(\sqrt[3]{a})^3$ $\qquad$ ***b)*** $(\sqrt[5]{a})^2$ $\qquad$ ***c)*** $(\sqrt[6]{2ab^2})^3$ $\qquad$ ***d)*** $(\sqrt[10]{8x^2y^3})^7$

D **2.41** Welche Rechenregeln wurden bei der Umformung $\sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$ verwendet? Formuliere diese mit eigenen Worten.

Radizieren von Wurzeln

D **2.42** Formuliere die Rechenregel $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ mit eigenen Worten.

B **2.43** Schreibe den Term mit einem gemeinsamen Wurzelzeichen an.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ $\qquad$ ***b)*** $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ $\qquad$ ***c)*** $\sqrt[7]{\sqrt[3]{M}}$ $\qquad$ ***d)*** $\sqrt{\sqrt{13}}$ $\qquad$ ***e)*** $\sqrt[5]{\sqrt{26}}$ $\qquad$ ***f)*** $\sqrt[5]{\sqrt[4]{A}}$

B **2.44** Gib die Terme in den Taschenrechner ein. Achte auf das richtige Setzen der Klammern. Kontrolliere die korrekte Eingabe durch Vergleich mit dem angezeigten Term.

1) $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$ $\qquad$ ***2)*** $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}}$ $\qquad$ ***3)*** $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$ $\qquad$ ***4)*** $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}}$

Aufgaben 2.45 – 2.46: Vereinfache die Wurzeln ohne Verwendung von Technologieeinsatz. Gib das Ergebnis mit einem gemeinsamen Wurzelzeichen an.

B **2.45** ***a)*** $\sqrt[3]{29 \cdot \sqrt{29}}$ $\qquad$ ***b)*** $\sqrt[5]{10 \cdot \sqrt{8}}$ $\qquad$ ***c)*** $\sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{\frac{2}{9}}}$ $\qquad$ ***d)*** $\sqrt[5]{\frac{4}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{625}{32}}}$

B **2.46** ***a)*** $\sqrt{a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}}$ $\qquad$ ***b)*** $\sqrt[4]{\frac{8a^3}{\sqrt{2a^5}}}$ $\qquad$ ***c)*** $\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot x^2}$ $\qquad$ ***d)*** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y} \cdot \sqrt{\frac{y}{x^3}}}$

Partielles Wurzelziehen

B **2.47** Vereinfache durch partielles Wurzelziehen, zerlege den Radikanden zuerst in Primfaktoren.

a) $\sqrt{90}$ $\qquad$ ***c)*** $\sqrt{112}$ $\qquad$ ***e)*** $\sqrt{1\,458}$ $\qquad$ ***g)*** $\sqrt{63}$ $\qquad$ ***i)*** $\sqrt{150}$ $\qquad$ ***k)*** $\sqrt{147}$

b) $\sqrt[3]{54}$ $\qquad$ ***d)*** $\sqrt[4]{648}$ $\qquad$ ***f)*** $\sqrt[5]{4\,374}$ $\qquad$ ***h)*** $\sqrt[3]{224}$ $\qquad$ ***j)*** $\sqrt[5]{384}$ $\qquad$ ***l)*** $\sqrt[4]{192}$

BD **2.48** ***1)*** Vereinfache durch partielles Wurzelziehen soweit wie möglich.
2) Wie wird der Term bei Anwendung von Technologieeinsatz vereinfacht?
3) Beschreibe gegebenenfalls die Unterschiede in der Darstellung.

a) $\sqrt{n^2r^3s^4t}$ $\qquad$ ***b)*** $\sqrt[3]{54p^4q^5r^6}$ $\qquad$ ***c)*** $\sqrt{20c^7d^{21}}$ $\qquad$ ***d)*** $\sqrt[4]{64a^4b^9c^{27}}$ $\qquad$ ***e)*** $\sqrt[3]{16xy^{27}z^{17}}$ $\qquad$ ***f)*** $\sqrt{27u^2v^{17}w^8}$

Faktor unter die Wurzel bringen

Aufgaben 2.49 – 2.53: Bringe die vor den Wurzeln stehenden Faktoren unter die Wurzeln und vereinfache soweit wie möglich.

2.49 **a)** $4 \cdot \sqrt{5}$ **b)** $2 \cdot \sqrt[3]{7}$ **c)** $3 \cdot \sqrt[4]{2}$ **d)** $2 \cdot \sqrt[5]{2}$ **e)** $5 \cdot \sqrt[6]{5^2}$ **f)** $4 \cdot \sqrt[4]{4^3}$ B

2.50 **a)** $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ **b)** $0{,}25 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ **c)** $0{,}5 \cdot \sqrt[3]{16}$ **d)** $\frac{2}{5} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{4}}$ **e)** $3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$ **f)** $\frac{3}{7} \cdot \sqrt{\frac{49}{45}}$ B

2.51 **a)** $x \cdot \sqrt{x}$ **b)** $x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$ **c)** $\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$ **d)** $\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^3}$ **e)** $x^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$ **f)** $\frac{1}{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}$ B

2.52 **a)** $\frac{1}{c^2} \cdot \sqrt[3]{c^2}$ **b)** $\frac{w}{v^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{vw}}$ **c)** $\frac{m^2}{n} \cdot \sqrt[3]{n \cdot \frac{1}{m^2}}$ **d)** $a \cdot \sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3}}$ **e)** $\frac{2b^2}{f} \cdot \sqrt{\frac{f}{4b}}$ **f)** $\frac{s^2}{r^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{s} \cdot r^3}$ B

2.53 **a)** $x \cdot \sqrt{x + y}$ **b)** $(x + y) \cdot \sqrt{x}$ **c)** $(x^2 - x) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ **d)** $8 \cdot (a^2 - 1) \cdot \sqrt{\frac{4a - 4}{2a + 2}}$ **e)** $(x + y) \cdot \sqrt{\frac{x - y}{x + y}}$ B

2.54 Eine „Maturitäts-Prüfungsfrage aus der Mathematik“ nach den Lehrplänen von 1909 lautet: BD TE
„Wie groß ist der Zahlenwert von $(3 - \sqrt{5})\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$?“
Berechne dies zuerst ohne Taschenrechner. Formuliere deine Überlegungen. Überprüfe anschließend das Ergebnis mittels Technologieeinsatz.

Rationalmachen des Nenners

2.55 Stelle jeweils mit rationalem Nenner dar und vereinfache, wenn möglich. B

a) $\frac{4}{\sqrt{8}}$ **c)** $\frac{11}{\sqrt{11}}$ **e)** $\frac{7}{3 \cdot \sqrt{7}}$ **g)** $\frac{25}{\sqrt{5}}$ **i)** $\frac{56}{7 \cdot \sqrt{8}}$ **k)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ **d)** $\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}$ **f)** $\frac{3}{\sqrt[4]{9}}$ **h)** $\frac{45}{2 \cdot \sqrt[3]{5}}$ **j)** $\frac{24}{7 \cdot \sqrt[4]{8}}$ **l)** $\frac{72}{5 \cdot \sqrt[7]{3^2}}$

Aufgaben 2.56 – 2.58: TE

1) Stelle die Brüche mit rationalem Nenner dar und vereinfache, wenn möglich.
2) Vereinfache den Term mithilfe von Technologieeinsatz. Wie lautet die Ausgabe?
3) Vergleiche gegebenenfalls die unterschiedliche Darstellung.

2.56 **a)** $\frac{y}{a \cdot \sqrt{y}}$ **b)** $\frac{r^3}{\sqrt[3]{r^2}}$ **c)** $\frac{4d^4}{\sqrt[8]{2d}}$ **d)** $\frac{15c}{2 \cdot \sqrt[5]{3c^2}}$ **e)** $\frac{n^2}{m \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{m}}$ **f)** $\frac{vw^3}{\sqrt[7]{v^2w^3}}$ BC

2.57 **a)** $\frac{1}{\sqrt{6} - 1}$ **b)** $\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$ **c)** $\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5}}$ **d)** $\frac{26 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5}}$ **e)** $\frac{38 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3}}$ **f)** $\frac{9 \cdot \sqrt{6}}{6 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{6}}$ BC

2.58 **a)** $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ **b)** $\frac{b - a}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ **c)** $\frac{1}{1 + \sqrt{1 + a}}$ **d)** $\frac{a - b}{a - \sqrt{b}}$ **e)** $\frac{a + b}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}}$ **f)** $\frac{a + b}{\sqrt{a} + b}$ BC

2.59 **1)** Berechne die Werte der Terme A) $\frac{1}{1{,}414\,2 - \sqrt{2}}$ und B) $\frac{1}{\sqrt{5} - 2{,}236}$ mithilfe von Technologieeinsatz möglichst genau. BD TE
2) Stelle den Bruch anschließend mit rationalem Nenner dar und berechne den Wert dieses Terms. Welche Differenz zwischen den beiden Ergebnissen erwartest du, welche kannst du gegebenenfalls beobachten?
3) Erkläre, wodurch der Unterschied zustande kommt.

2.3 Potenzfunktionen

BCD **2.60** Zeichne die Funktionen $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, $y_3 = x^{-2}$ und $y_4 = x^{-3}$.
1) Gib an, bei welchen Funktionen nur positive Funktionswerte auftreten.
2) Begründe, bei welchen Funktionen man für x nicht Null einsetzen darf.

Wirtschaftliche oder naturwissenschaftliche Zusammenhänge können mithilfe von Potenzfunktionen beschrieben werden.

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $\mathbf{f(x) = x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, heißt **Potenzfunktion**.
Der Exponent **n** gibt den **Grad** der Potenzfunktion an.

Bemerkung: Funktionen $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ sind ebenfalls Potenzfunktionen. Wir beschränken uns hier auf Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten.

Nun werden die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten erarbeitet.

- **Potenzfunktionen der Form $\mathbf{f(x) = x^n}$,** $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

Potenzfunktionen, deren Exponent eine **positive gerade** Zahl ist:

y = x^2
y = x^4
y = x^6

ZB: $y = x^2$ ... Parabel 2. Ordnung

Potenzfunktionen, deren Exponent eine **positive ungerade** Zahl ist:

y = x^3
y = x^5
y = x^7

$y = x^3$ ... Parabel 3. Ordnung

Eine Potenzfunktion mit positivem Exponenten ist für alle reellen Zahlen definiert. Ihr Graph ist eine **Parabel n-ter Ordnung** (**n-ten Grads**), die **durch den Koordinatenursprung** verläuft. Der Punkt S heißt **Scheitel** der Parabel.

Potenzfunktionen, deren Exponent eine **negative gerade** Zahl ist:

y = x^{-2}
y = x^{-4}
y = x^{-6}

ZB: $y = x^{-2}$ ... Hyperbel 2. Ordnung

Potenzfunktionen, deren Exponent eine **negative ungerade** Zahl ist:

y = x^{-1}
y = x^{-3}
y = x^{-5}

$y = x^{-3}$ ... Hyperbel 3. Ordnung

Eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten n ist für alle reellen Zahlen ungleich Null definiert. Die Stelle x = 0 ist eine **Polstelle** der Funktion. Ihr Graph ist eine **Hyperbel n-ter Ordnung** (**n-ten Grads**), die **weder die x-Achse noch die y-Achse berührt bzw. schneidet**. Eine Gerade, der sich eine Funktion nähert, sie aber nie berührt oder schneidet, heißt **Asymptote**. Für eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten ist die **x-Achse** eine **waagrechte Asymptote** und die **y-Achse** eine **senkrechte Asymptote**. Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Asymptoten der Hyperbel.

Veränderungen des Graphen einer Potenzfunktion

Der Graph einer Potenzfunktion kann in y-Richtung gestaucht oder gestreckt werden. Er kann an der x-Achse gespiegelt werden. Ebenso kann er in x-Richtung oder y-Richtung verschoben werden. Dadurch verändert sich die Funktionsgleichung. Umgekehrt können die durchgeführten Änderungen aus der Funktionsgleichung abgelesen werden.

- **Potenzfunktionen der Form $f(x) = a \cdot x^n$,** $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$

P(1|1) $y_1 = x^2$
P(1|2) $y_2 = 2x^2$
$P\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$ $y_3 = \frac{1}{2}x^2$
P(1|−1) $y_4 = -x^2$

allgemein:
P(1|a) $y = a \cdot x^2$

Der **Faktor a** bestimmt die **Streckung** bzw. **Stauchung des Graphen**:

- Wenn $|a| > 1$ ist, dann wird der Graph **in y-Richtung gestreckt**.
- Wenn $0 < |a| < 1$ ist, dann wird der Graph **in y-Richtung gestaucht**.
- Wenn $a < 0$ ist, dann wird der Graph zusätzlich **an der x-Achse gespiegelt**.
- Der Graph verläuft durch P(1|a).

- **Verschiebung in y-Richtung**

Wir betrachten die Graphen der Funktionen $y_1 = x^{-2}$, $y_2 = x^{-2} + 4$ und $y_3 = x^{-2} - 2$.

S(0|0) $y_1 = x^{-2}$

S(0|4) $y_2 = x^{-2} + 4$ ... Im Vergleich zu y_1 ist der Graph um 4 Einheiten in die **positive y-Richtung** verschoben.

S(0|−2) $y_3 = x^{-2} - 2$ ... Im Vergleich zu y_1 ist der Graph um 2 Einheiten in die **negative y-Richtung** verschoben.

- **Verschiebung in x-Richtung**

Wir betrachten die Graphen der Funktionen $y_1 = x^3$, $y_2 = (x + 4)^3$ und $y_3 = (x - 2)^3$.

S(0|0) $y_1 = x^3$

S(−4|0) $y_2 = (x + 4)^3$ ... Im Vergleich zu y_1 ist der Graph um 4 Einheiten in die **negative x-Richtung** verschoben.

S(2|0) $y_3 = (x - 2)^3$ ... Im Vergleich zu y_1 ist der Graph um 2 Einheiten in die **positive x-Richtung** verschoben.

Wird eine **Potenzfunktion** $y = a \cdot x^n$ in **x- und y-Richtung verschoben**, lautet die Funktionsgleichung:

$$y = a \cdot (x - b)^n + c$$

Der Scheitel der Parabel bzw. der Asymptotenschnittpunkt der Hyperbel hat dann die Koordinaten S(b|c). Der Faktor a bewirkt eine Streckung oder eine Stauchung. Ist $a < 0$, erfolgt eine Spiegelung an der x-Achse.

BC **2.61** Skizziere die Graphen der Funktionen $y_1 = x^3$ und $y_2 = (x - 3)^2 + 1$. Vergleiche die beiden Graphen.

Lösung:
Der Graph sind Parabeln 3. Ordnung.
Der Graph der Funktion y_2 entsteht durch Verschieben des Graphen der Funktion y_1 um 1 Einheit nach oben und um 3 Einheiten nach rechts.

BD **2.62** Zeichne die Graphen der beiden Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Erkläre mit eigenen Worten, wie sich die Änderung in der Funktionsgleichung y_2 auf den Graphen auswirkt.

a) $y_1 = x^2, y_2 = x^4$ **b)** $y_1 = 2x^3, y_2 = 2x^7$ **c)** $y_1 = \frac{1}{3}x^{-1}, y_2 = \frac{1}{3}x^{-2}$ **d)** $y_1 = 3x^{-3}, y_2 = 3x^3$

BD **2.63** Erstelle für die beiden gegebenen Funktionsgleichungen jeweils eine Wertetabelle, zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem und erkläre, wie sich die Änderung des Faktors auf den Graphen auswirkt.

a) $y_1 = x^2, y_2 = 3x^2$ **b)** $y_1 = x^3, y_2 = -0{,}2x^3$ **c)** $y_1 = x^{-2}, y_2 = 2x^{-2}$ **d)** $y_1 = x^{-3}, y_2 = 0{,}5x^{-3}$

ABC **2.64** Gib an, welche Funktionsgleichungen zu welchen Graphen passen. Zeichne die Funktionsgraphen zu den verbleibenden Funktionsgleichungen und ermittle die Gleichungen zu den verbleibenden Graphen.

$y_1 = \frac{1}{4}x^2,\ y_2 = -2x^2,\ y_3 = -3x^2,\ y_4 = -x^3,\ y_5 = -\frac{1}{2}x^{-2},\ y_6 = 2x^{-3}$

A) C) E)

B) D) F)

Aufgaben 2.65 – 2.68: Skizziere jeweils den Funktionsgraphen, ohne eine Wertetabelle zu erstellen. Beschreibe deine Überlegungen. Überprüfe anschließend mithilfe von Technologieeinsatz.

BD **2.65** **a)** $y = x^2 + 5$ **b)** $y = x^3 - 5$ **c)** $y = x^{-2} + 5$ **d)** $y = x^{-3} - 5$

BD **2.66** **a)** $y = (x + 5)^2$ **b)** $y = (x - 5)^3$ **c)** $y = (x + 5)^{-2}$ **d)** $y = (x - 5)^{-3}$

BD **2.67** **a)** $y = (x - 4)^2 + 3$ **b)** $y = (x + 4)^3 - 3$ **c)** $y = (x - 4)^{-2} + 3$ **d)** $y = (x + 4)^{-3} - 3$

BD **2.68** **a)** $y = (x - 3)^2 - 1$ **b)** $y = (x + 1)^3 - 6$ **c)** $y = (x - 8)^{-2} - 2$ **d)** $y = (x + 7)^{-3} + 9$

2.69 Ergänze die Funktionsgleichungen. AC

a) $y_1 = \dots (x + \dots)^2 + \dots,\ y_2 = x^5 \dots 2$ **b)** $y_1 = (x - \dots)^{-3} + \dots,\ y_2 = x^{-2} + \dots$

2.70 Ordne die Funktionen den Graphen zu und gib die fehlenden Funktionsgleichungen an. AC

a) $y_1 = 2x^2,\ y_2 = \frac{1}{3}x^2,\ y_3 = -x^2$ **b)** $y_1 = 4x^3,\ y_2 = \frac{1}{2}x^3$

2.71 Beschreibe jeweils den Verlauf der rechts abgebildeten Funktionsgraphen. Verwende dafür folgende Begriffe: „Nullstelle", „Scheitel", „Minimum", „Maximum", „streng monoton fallend", „streng monoton steigend", Polstelle und Asymptote. CD

2.72 Zeichne einen Graphen, auf den die Beschreibung passt: BC

a) eine Parabel 2. Ordnung, die bis $x = -5$ streng monoton steigend und dann streng monoton fallend ist.

b) eine Parabel 5. Ordnung, die im Vergleich zur Parabel $y = x^5$ zwei Einheiten nach oben verschoben wird.

c) eine Hyperbel 2. Grads, die die Gerade $x = 2$ als Asymptote hat.

d) eine Hyperbel 3. Grads, die die Gerade $y = -1{,}5$ als Asymptote hat.

2.73 **1)** Durch welche Punkte verlaufen die Graphen der Funktionen $y = x^n,\ n \in \mathbb{Z}$? D

2) Welche „Formen" nehmen die Graphen an, wenn n sehr groß wird?

Berücksichtige jeweils alle Fälle.

TE

2.4 Polynomfunktionen

BCD TE

2.74 **1)** Zeichne die Graphen der Potenzfunktionen $y_1 = x^2$, $y_2 = x^6$ und $y_3 = x^6 - x^2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

2) Beschreibe die Veränderungen des Graphen von y_3 im Vergleich zu den Graphen der Potenzfunktion y_1 und y_2.

Viele in der Praxis auftretende Funktionen sind Summen von Potenzfunktionen, deren Exponenten nur natürliche Zahlen sind. Man nennt diese Funktionen **Polynomfunktionen**.

Betrachtet man die Graphen der Funktionen $y = 2x^2$ und $y = 0{,}5x^3$, so sieht man, dass die Differenz $y = 0{,}5x^3 - 2x^2$ der beiden Potenzfunktionen einen völlig anderen Verlauf und somit andere Eigenschaften hat.

Eine Funktion f der Form $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ und $a_i \in \mathbb{R}$ wird **Polynomfunktion n-ten Grads** oder **ganzrationale Funktion** genannt.

Eigenschaften von Polynomfunktionen

Betrachtet man verschiedene Polynomfunktionen, so lassen sich folgende Eigenschaften erkennen:

- Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
- Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}$
- Die maximale Anzahl der Nullstellen entspricht dem Grad n der Polynomfunktion.
  Ist n ungerade, muss es mindestens eine Nullstelle geben.
  Ist n gerade, muss es keine Nullstelle geben.
- Maximale Anzahl der Extremstellen: $n - 1$
- a_0 gibt den Schnittpunkt mit der y-Achse an.

Symmetrie von Polynomfunktionen

Die Symmetrie von Polynomfunktionen hängt von den vorkommenden Exponenten ab.

Eine Polynomfunktion, in der **nur gerade Exponenten** vorkommen, wie zum Beispiel $y = 0{,}1x^6 - 2x^4 + 8x^2 - 2$, ist eine **gerade Funktion**. Gerade Funktionen sind symmetrisch zur y-Achse.

Eine Polynomfunktion, in der **nur ungerade Exponenten** vorkommen, wie zum Beispiel $y = -0{,}1x^5 + 2x^3 - 8x$, ist eine **ungerade Funktion**. Ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

2.75 Stelle die gegebene Funktion mithilfe von Technologieeinsatz dar. Gib die Anzahl der Nullstellen und deren Lage an. BC TE

a) $y = x^3 - 1{,}5x^2 + 6$ **b)** $y = 0{,}1x^4 - x^2$ **c)** $y = -x^2 - x + 3$

2.76 Füge den passenden Begriff „Potenzfunktion" oder „Polynomfunktion" ein. C

1) Der Graph einer ... kann vier verschiedene Nullstellen haben.
2) Der Graph einer ... kann zwei Extrema haben.
3) Der Graph einer ... ist immer symmetrisch.

2.77 **1)** Welchen Grad haben jeweils die dargestellten Polynomfunktionen mindestens? Begründe deine Entscheidung. AD
2) Beschreibe jeweils den Verlauf des Funktionsgraphen. Verwende dabei die Begriffe „Nullstelle", „Minimum", „Maximum", „monoton fallend", „monoton steigend" und „symmetrisch".

2.78 Welchen Einfluss hat das Vorzeichen der höchsten vorkommenden Potenz auf die Funktionen? Untersuche mithilfe von Technologieeinsatz und formuliere das Ergebnis deiner Überlegungen mit eigenen Worten. BD TE

1) $y_1 = x^2$ und $y_2 = -x^2$ bzw. $y_3 = x^3$ und $y_4 = -x^3$
2) $y_5 = x^5 - 3x^3$ und $y_6 = -x^5 - 3x^3$ bzw. $y_7 = 0{,}1x^6 - 1{,}5x^4 + 8x^2$ und $y_8 = -0{,}1x^6 - 1{,}5x^4 + 8x^2$

2.79 Welche der dargestellten Graphen passen zu dieser Beschreibung? Begründe deine Entscheidung. CD

1) Die Funktion f hat drei Nullstellen mit $N_1(x < 0|0)$, $N_2(0|0)$ und $N_3(x > 0|0)$.
2) Die Funktion hat genau ein lokales Minimum und ein lokales Maximum.
3) Die Funktion ist zuerst monoton steigend, dann monoton fallend und anschließend wieder monoton steigend.

A)

B)

C)

2.80 Begründe, warum die Funktion $y = x^3 - 3x^2 + 5$ mindestens eine Nullstelle haben muss. D

2.81 Begründe, warum die Funktion $y = x^4 + x^2 + 1$ keine Nullstelle haben kann. D

2.82 Erkläre, wie viele Nullstellen die Polynomfunktion $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ haben kann, wenn n = 3 bzw. n = 4 ist. Fertige für deine Überlegungen eine Zeichnung an. BD

2.83 Erkläre anhand selbst gewählter Beispiele, warum eine Polynomfunktion n-ten Grads mindestens einen Extrempunkt haben muss, wenn n gerade ist. D

2.84 Erkläre anhand selbst gewählter Beispiele, warum eine Polynomfunktion n-ten Grads keinen Extrempunkt haben muss, wenn n ungerade ist. D

2.5 Wurzelfunktionen

BD **2.85** ***1)*** Zeichne die Funktion $y = x^4$ und die Gerade $y = x$ in ein Koordinatensystem.
2) Spiegle die Funktion $y = x^4$ im Bereich von $-2 \leqslant x \leqslant 2$ an der Geraden $y = x$.
3) Überlege, ob die Zuordnung, die der gespiegelte Graph darstellt, eine Funktion ist.

In Abschnitt 1 wurden bereits die Begriffe Umkehrfunktion und Umkehrrelation erklärt.

ZB: $y = x^2$
- $x = y^2$ – Bildung der Umkehrrelation durch Vertauschen der Variablen
- $y = \pm\sqrt{x}$ – Umkehrrelation
- $y = \sqrt{x}$ – Umkehrfunktion, durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Funktion $y = x^2$ auf zB $\mathbb{R}_0^+$

Spiegelt man die Parabel $y = x^2$ an der 1. Mediane, so erhält man die Umkehrrelation $y = \pm\sqrt{x}$ (Abb. 2.1). Beschränkt man die ursprüngliche Funktion auf den nicht negativen Teil, so erhält man eine Umkehrfunktion, die so genannte **Wurzelfunktion** $y = +\sqrt{x}$ (Abb. 2.2). Bildet man die Umkehrfunktion zur Potenzfunktion $y = x^3$, so ergibt sich ohne Einschränkung die Wurzelfunktion $y = \sqrt[3]{x}$ (Abb 2.3).

Abb. 2.1

Abb. 2.2

Abb. 2.3

Die Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Für gerade n gilt:
Die Potenzfunktion ist nicht eindeutig umkehrbar. Schränkt man die Definitionsmenge der Potenzfunktion $y = x^n$ auf $\mathbb{R}_0^+$ ein, erhält man eine Funktion, deren Umkehrung eine Wurzelfunktion ist. Definitionsmenge und Wertemenge dieser Wurzelfunktion ist $\mathbb{R}_0^+$.

Für ungerade n gilt:
Die Potenzfunktion ist eindeutig umkehrbar. Definitionsmenge und Wertemenge der zugehörigen Wurzelfunktion ist die Menge der reellen Zahlen.

Eigenschaften der Wurzelfunktionen $y = \sqrt[n]{x}$

- Definitions- und Wertemenge:
  für **gerade** n: $D_f = W_f = \mathbb{R}_0^+$
  für **ungerade** n: $D_f = W_f = \mathbb{R}$
- Alle Graphen verlaufen durch den Ursprung O(0|0) und durch den Punkt P(1|1).
- Ist n ungerade, verlaufen die Graphen auch durch Q(−1|−1).
- Alle Graphen sind streng monoton steigend.

2.86 Gib eine Formel für die Seitenlänge a eines Würfels
1) in Abhängigkeit von seiner Oberfläche O,
2) in Abhängigkeit vom Volumen V an.
AB

2.87 Im gleichseitigen Drehzylinder ist die Höhe h gleich dem Durchmesser d. Erkläre mit eigenen Worten, was die Funktion r(V) beschreibt und gib deren Funktionsgleichung an.
ABD

2.88 Stelle die Funktionen mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar. Beschreibe den unterschiedlichen Verlauf der Graphen im Vergleich zu $y_0 = \sqrt{x}$.
1) $y_1 = 2 \cdot \sqrt{x}$, ***2)*** $y_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$, ***3)*** $y_3 = \sqrt{2 \cdot x}$, ***4)*** $y_4 = \sqrt{x} + 2$, ***5)*** $y_5 = \sqrt{x} - 2$,
6) $y_6 = \sqrt{x - 2}$, ***7)*** $y_7 = \sqrt{x + 2}$
BD

2.89 Ordne $y_1 = \sqrt{4 - x}$, $y_2 = \sqrt[5]{x}$, $y_3 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot x}$, $y_4 = \sqrt[3]{x + 8}$ und $y_5 = \sqrt{0{,}3 \cdot x}$ den Graphen zu. Zu welcher Gleichung passt kein Graph, zu welchem Graph keine Gleichung?
AC

A) ***B)*** ***C)*** ***D)*** ***E)***

Aufgaben 2.90 – 2.91: Gib jeweils einen Definitionsbereich so an, dass die Umkehrfunktion existiert und ermittle deren Funktionsgleichung. Stelle die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

2.90 ***a)*** $y = 2x^2$ ***b)*** $y = 2x^2 + 1$ ***c)*** $y = -2x^2$ ***d)*** $y = \frac{1}{2}x^2$ ***e)*** $y = (x - 2)^2$
BC

2.91 ***a)*** $y = 4x^3$ ***b)*** $y = \frac{1}{2}x^3 - 2$ ***c)*** $y = -3x^3$ ***d)*** $y = \frac{1}{4}x^3$ ***e)*** $y = (x + 4)^3$
BC

2.92 ***a)*** Gib eine Formel für die Oberfläche eines Würfels in Abhängigkeit vom Volumen an.
b) Gib eine Formel für das Volumen eines Würfels in Abhängigkeit von der Oberfläche an.
A

2.93 ***1)*** Stelle die Funktionsgleichung auf, die die Seitenlänge s eines gleichseitigen Kegels mit 2r = h in Abhängigkeit von seinem Volumen beschreibt.
2) Erkläre mit eigenen Worten, was die Funktion r(M) beschreibt und gib deren Funktionsgleichung an.
ABD

2.94 ***1)*** Stelle eine Funktionsgleichung auf, die den Flächeninhalt A einer Seitenfläche eines Würfels in Abhängigkeit vom Volumen V dieses Würfels angibt.
2) Wie verändert sich der Seitenflächeninhalt, wenn V verdoppelt wird?
AD

2.95 Ein kugelförmiger Ballon wird aufgeblasen. Pro Minute werden 100 Liter Luft eingeblasen.
1) Gib an, wie der Radius des Ballons vom Volumen abhängt.
2) Gib an, wie der Radius von der Füllzeit abhängt.
A

2.96 Der Jet d'Eau (französisch: Wasserstrahl) in Genf erreicht eine Gesamthöhe von h = 140 m.
Es gilt: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ und $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$
1) Leite die Formel für die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers her, die benötigt wird, um die Höhe h zu erreichen.
Hinweis: $E_{kin} = E_{pot}$
2) Erkläre, was mit der Funktion $v(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot (140\text{ m} - h)}$ beschrieben werden kann.
ABD

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

Technologieeinsatz: Wurzelfunktionen

TI-Nspire

BCD **2.97** Es werden gleich große Kugeln mit unterschiedlichen Massen aus großer Höhe fallengelassen. Da der Luftwiderstand entgegen der Gewichtskraft wirkt, erreichen die Kugeln jeweils eine konstante Endgeschwindigkeit v_{max}.

$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{c_w \cdot A \cdot \rho}}$, m ... Masse, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, $c_w = 0{,}2$ ... Strömungswiderstandskoeffizient, $A = 0{,}1\,m^2$ ... Querschnittsfläche, $\rho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$ ... Dichte der Luft

1) Wie schnell wird eine Kugel mit einer Masse von 1 kg bzw. von 10 kg?

2) Stelle die Endgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Masse im Bereich [0 kg; 15 kg] grafisch dar. Welche Masse hat eine Kugel mit einer Endgeschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$? Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:

1)

$v(m) := \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot 9.81}{0.2 \cdot 0.1 \cdot 1.2}}$	Fertig
v(1)	28.592
v(10)	90.4157

Die Endgeschwindigkeit v_{max} wird als Funktion in Abhängigkeit von der Masse m gespeichert.
Die Geschwindigkeiten werden als Funktionswerte berechnet. Als Einheit ergibt sich $\frac{m}{s}$.

Die Kugel mit m = 1 kg erreicht eine maximale Geschwindigkeit von $28{,}59\,\frac{m}{s} = 102{,}93\,\frac{km}{h}$, die 10-kg-Kugel erreicht eine maximale Geschwindigkeit von $90{,}42\,\frac{m}{s} = 325{,}50\,\frac{km}{h}$.

2)

Da für die grafische Darstellung als Variable x verwendet werden muss, wird als Funktionsgleichung **v(x)** eingegeben.
Zur Ermittlung der Masse bei einer Geschwindigkeit von $v = 100\,\frac{km}{h} = \frac{100}{3{,}6}\,\frac{m}{s}$ wird die konstante Funktion $\mathbf{f_2(x) = \frac{100}{3{,}6}}$ gezeichnet und der Schnittpunkt ermittelt.

Eine Kugel, die eine Endgeschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ erreicht, hat eine Masse von rund 0,94 kg.

B **2.98** Die Periodendauer T (in Sekunden) eines Fadenpendels ist von dessen Länge ℓ (in Meter) abhängig:

$T(\ell) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Stelle die Periodendauer $T(\ell)$ im Bereich [0 m; 1 m] grafisch dar, $g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$.

2.6 Wurzelgleichungen

2.99 Gegeben ist die Gleichung: $\sqrt{x + 7} = 3$ BC

1) Welche Zahl muss man für x einsetzen, um eine richtige Aussage zu erhalten?
2) Durch welchen Rechenschritt wird die Gleichung $\sqrt{x + 7} = 3$ auf $x + 7 = 9$ umgeformt?
3) Überprüfe, ob die in **1)** ermittelte Zahl auch Lösung der Gleichung $x + 7 = 9$ ist.
4) Führe die gleiche Umformung auch mit der Gleichung $\sqrt{x + 7} = -3$ durch.
Löse die entstandene Gleichung. Überprüfe, ob deren Lösung die ursprüngliche Gleichung erfüllt.

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der die Variable in mindestens einem Radikanden vorkommt, zum Beispiel $\sqrt{x + 1} = 2$.

Wir beschränken uns im Folgenden auf Wurzelgleichungen mit Quadratwurzeln. Da Quadratwurzeln nur für positive Radikanden definiert sind, muss eine entsprechende Definitionsmenge angegeben werden.

Das Lösen von Wurzelgleichungen wird zuerst an zwei Beispielen veranschaulicht.

- $\sqrt{x} = 3$ Definitionsmenge $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$
  $(\sqrt{x})^2 = 3^2$ Um eine Wurzelgleichung zu lösen, muss man **beide Seiten** der Gleichung **quadrieren**.
  $x = 9$
  $L = \{9\}$

Das Quadrieren einer Gleichung ist **keine Äquivalenzumformung**, da eine falsche Aussage durch diese Umformung in eine richtige Aussage übergeführt werden kann.

ZB: $-2 = +2$ ... falsche Aussage
$(-2)^2 = (+2)^2$
$4 = 4$ ... richtige Aussage

Es ist daher unbedingt eine Probe erforderlich.

- $\sqrt{x + 1} = -5$ $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant -1\}$
  $(\sqrt{x + 1})^2 = (-5)^2$
  $x + 1 = 25$
  $x = 24$
  - $x = 24$ ist zwar eine Lösung der Gleichung $x + 1 = 25$, aber keine Lösung der Gleichung $\sqrt{x + 1} = -5$.

  Probe:
  LS: $\sqrt{24 + 1} = \sqrt{25} = 5$ RS: -5 LS $\neq$ RS $\Rightarrow$ $L = \{\ \}$

Kommt die Variable einer Gleichung im Radikanden einer Wurzel vor, spricht man von einer **Wurzelgleichung**. Bei der Ermittlung der Definitionsmenge ist zu beachten, dass jeder Radikand größer gleich null sein muss. Zur Ermittlung der Lösung wird die Gleichung quadriert. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, muss **immer die Probe** durchgeführt werden.

2.100 Welche dieser Wurzelgleichungen können keine Lösung haben? Begründe deine Antwort. D

1) $\sqrt{2x + 1} = -3$ **2)** $\sqrt{-x^2} = 3$ **3)** $\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} = 5$

B **2.101** Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung in $\mathbb{R}$.

a) $\sqrt{x} + 2 = 7$ **b)** $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+1}$ **c)** $\sqrt{x-1} = \sqrt{x+8} + 1$ **d)** $\sqrt{19 + \sqrt{3x+15}} = 5$

Lösung:

a) $\sqrt{x} + 2 = 7 \quad | -2$ $\qquad D = \{x | x \geqslant 0\}$

$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ $\qquad$ Probe: LS: $\sqrt{25} + 2 = 7$

$L = \{25\}$ $\qquad$ LS = RS

b) $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+1} \quad | (\dots)^2$ $\qquad x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$

$x - 1 = 3x + 1$ $\qquad 3x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{-1}{3}$

$x = -1$ $\qquad D = \{x | x \geqslant 1\}$

$L = \{\ \}$ $\qquad -1 \notin D$

- Jede Zahl, die größer als 1 ist, ist auch größer als $-\frac{1}{3}$.

$-\frac{1}{3}$ $\quad$ 1

c) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x+8} + 1 \quad | (\dots)^2$ $\qquad x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$

$(\sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x+8} + 1)^2$ $\qquad x + 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -8$

$x - 1 = x + 8 + 2 \cdot \sqrt{x+8} + 1$ $\qquad D = \{x | x \geqslant 1\}$

$-10 = 2 \cdot \sqrt{x+8}$ $\qquad$ Probe:

$-5 = \sqrt{x+8} \quad | (\dots)^2$ $\qquad$ LS: $\sqrt{17-1} = \sqrt{16} = 4$

$25 = x + 8 \Rightarrow x = 17$ $\qquad$ RS: $\sqrt{17+8} + 1 = 6$

$L = \{\ \}$ $\qquad$ LS $\neq$ RS

- $(\sqrt{x+8} + 1)^2$ wird mithilfe der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ berechnet.

d) $\sqrt{21 + \sqrt{15 - 3x}} = 5$ $\qquad 15 - 3x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 5$

$21 + \sqrt{15 - 3x} = 25$ $\qquad 21 + \sqrt{15 - 3x} \geqslant 0$ für $x \leqslant 5$

$\sqrt{15 - 3x} = 4$ $\qquad D = \{x | x \leqslant 5\}$

$15 - 3x = 16 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$ $\qquad$ Probe LS: $\sqrt{21 + \sqrt{15 - 3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)}} = \sqrt{21 + \sqrt{16}} = 5 \Rightarrow$

$L = \left\{\frac{-1}{3}\right\}$ $\qquad \Rightarrow$ LS = RS

Aufgaben 2.102 – 2.106: Ermittle jeweils Definitions- und Lösungsmenge in $\mathbb{R}$.

B **2.102** **a)** $\sqrt{k-2} = 6$ **b)** $\sqrt{2m-4} = 8$ **c)** $8 = \sqrt{3x-4}$ **d)** $\sqrt{15-v} = 7$ **e)** $7 = \sqrt{2t-7}$

B **2.103** **a)** $5 = 1 - 2 \cdot \sqrt{3x-5}$ **c)** $4 - \sqrt{1+2n} = 9$ **e)** $8 = 2 + 3 \cdot \sqrt{2h-1}$

b) $\sqrt{3a-1} = -3$ **d)** $\sqrt{5m+2} - 2 = 4$ **f)** $-\sqrt{5z+1} = -5$

B **2.104** **a)** $4 \cdot \sqrt{x+3} - 3 \cdot \sqrt{x+10} = 0$ **b)** $2 \cdot \sqrt{4x+2} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2x-4} = 0$

B **2.105** **a)** $\sqrt{1 - 2 \cdot \sqrt{2x+5}} = 1$ **b)** $\sqrt{5 - \sqrt{x+3}} - 2 = 0$

B **2.106** **a)** $\sqrt{x-1} = \sqrt{4x+7} - \sqrt{x+4}$ **b)** $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = \sqrt{4x+23}$

CD **2.107** Welcher Fehler wurde bei den angegebenen Umformungen jeweils gemacht? Stelle richtig.

a) $\sqrt{x} = 2 \cdot \sqrt{3x-4}$ **1)** $x = 2 \cdot (3x-4)$ **2)** $x = 4 \cdot 3x - 4$

b) $\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x+9}$ **1)** $\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x} + 3$ **2)** $x + 4 = x + 9$

Zusammenfassung

Wurzeln in Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(a \geq 0, b > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Rechenregeln:

Multiplikation von Wurzeln: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Division von Wurzeln: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Weitere Rechenregeln: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$

Addieren und **Subtrahieren** von Wurzeln ist nur möglich, wenn Radikand und Wurzelexponent gleich sind.
$\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ kann aber **nicht** zusammengefasst werden.

Partielles Wurzelziehen bzw. Faktor unter die Wurzel bringen: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$

Potenzfunktionen:
Grundtypen von Potenzfunktionen $y = x^n$:

n gerade, positiv | n ungerade, positiv | n gerade, negativ | n ungerade, negativ

$y = a \cdot x^n$ Der Faktor a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung.

$y = a \cdot (x - b)^n + c$ Die Zahl c bewirkt eine Verschiebung entlang der y-Achse.
Die Zahl b bewirkt eine Verschiebung entlang der x-Achse.

Polynomfunktionen:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
Der Exponent n $(n \in \mathbb{N})$ gibt den Grad der Polynomfunktion an.
Polynomfunktionen mit ausschließlich geraden Exponenten sind gerade Funktionen.
Polynomfunktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten sind ungerade Funktionen.

Wurzelfunktionen: Wurzelfunktionen sind Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen.
Dabei muss gegebenenfalls der Definitionsbereich der Potenzfunktion eingeschränkt werden.
Der Graph entsteht durch **Spiegelung** der Potenzfunktion an der **1. Mediane**.

Wurzelgleichungen: Eine Wurzelgleichung wird durch Quadrieren gelöst. Die Angabe der Definitionsmenge und die Durchführung der Probe sind unbedingt notwendig.

Potenzen und Potenzfunktionen

Weitere Aufgaben

D **2.108** Richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.

a) $(x^2y^3)^2 = x^4y^6$ **b)** $(x^{-1} + y^{-1})^2 = x^{-2} + y^{-2}$ **c)** $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ **d)** $2^5 + a^5 = (2 + a)^5$ **e)** $(ab)^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ **f)** $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **g)** $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ **h)** $(s^{-1} + 1)^2 = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 1$

BD **2.109** Fasse zusammen oder begründe, warum dies nicht möglich ist.

a) $x^2 \cdot x^7$ **b)** $a^2 \cdot b^2$ **c)** $x^6 \cdot y^7$ **d)** $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ **e)** $\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{s}}$ **f)** $\sqrt{t} + 3 \cdot \sqrt{t}$ **g)** $\sqrt{c} \cdot \sqrt{d}$ **h)** $\sqrt{3t} + \sqrt{t}$

B **2.110** Schreibe die Wurzel jeweils als Potenz an.

1) $\sqrt[3]{a^2}$ **2)** $\sqrt{a^5}$ **3)** $\sqrt[4]{a^{-3}}$ **4)** $\sqrt[5]{\frac{1}{a^4}}$

B **2.111** Schreibe die Potenz jeweils als Wurzel an.

1) $x^{\frac{1}{4}}$ **2)** $x^{\frac{7}{3}}$ **3)** $x^{-\frac{2}{5}}$ **4)** $x^{0,5}$

Aufgaben 2.112 – 2.119: Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

B **2.112** **a)** $4 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{5} - 11 \cdot \sqrt{5}$ **b)** $-3 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{7} + 3 \cdot \sqrt{3}$ **c)** $7 \cdot \sqrt[3]{9} - 4 \cdot \sqrt[3]{9} + 5 \cdot \sqrt[3]{9}$ **d)** $8 \cdot \sqrt[5]{5} - 8 \cdot \sqrt[3]{5} + 8 \cdot \sqrt{5}$

B **2.113** **a)** $18 \cdot \sqrt{50} - 8 \cdot \sqrt{125}$ **b)** $4 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{72}$ **c)** $3 \cdot \sqrt{125} + 6 \cdot \sqrt{80} - 2 \cdot \sqrt{20}$

B **2.114** **a)** $\sqrt{6} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{200})$ **b)** $(\sqrt{2} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{45} - \sqrt{20})$

B **2.115** **a)** $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ **b)** $\sqrt[3]{243} - \sqrt[3]{1\,125}$ **c)** $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

B **2.116** **a)** $\sqrt{252a^5x^{11}}$ **b)** $\sqrt[3]{6\,750x^{11}y^2z^7}$ **c)** $\sqrt{\frac{72}{25}a^5bc^9}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{54x^9y^2z^{68}}{128a^3}}$

B **2.117** **a)** $\sqrt{2 \cdot \sqrt{7} + 5} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{7} - 5}$ **b)** $\sqrt{7 + 2 \cdot \sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 - 2 \cdot \sqrt{6}}$

B **2.118** **a)** $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$ **b)** $(3 \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{11})^2$ **c)** $(2 \cdot \sqrt{5} - 6 \cdot \sqrt{3})^2$

B **2.119** **a)** $\left(\sqrt{\frac{2m^2}{f^3}} - \sqrt{\frac{2f^3}{m^2}}\right)^2 - \left(f \cdot \sqrt{\frac{3f}{m^2}} - \frac{1}{f} \cdot \sqrt{\frac{3m^2}{f}}\right)^2$

b) $\left(2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 - \left(2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

BD **2.120** Welche der folgenden Ausdrücke stellen den gleichen Wert dar? Gib bei den richtigen Umformungen die verwendeten Rechenregeln an.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = ...$ **b)** $\sqrt[3]{x^2} = ...$

$\sqrt[6]{64}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt[5]{64}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ $\sqrt[4]{64}$

$\sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ $\sqrt[6]{x^4}$ $\sqrt[2]{x^3}$ $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$ $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

BCD **2.121** Es gilt: $\sqrt{5 + \frac{5}{24}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{24}}$ und $\sqrt{7 + \frac{7}{48}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{7}{48}}$

1) Finde ein weiteres Beispiel. Beschreibe, wie du dabei vorgegangen bist.
2) Zeige den vermuteten Zusammenhang allgemein.
3) Gib ein analoges Beispiel für die 3. Wurzel an.

Rationalmachen des Nenners

Aufgaben 2.122 – 2.124: Stelle die Terme jeweils mit rationalem Nenner dar.

2.122 **a)** $\frac{x}{\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **c)** $\frac{x^5}{\sqrt[3]{x^2}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ **e)** $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[5]{x}}$ B

2.123 **a)** $\frac{2a}{\sqrt[5]{8a^4}}$ **b)** $\frac{3b}{\sqrt[5]{27b^4}}$ **c)** $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ **e)** $\frac{2 + \sqrt{2 + f}}{\sqrt{2 - f}}$ B

2.124 **a)** $\frac{12 - x}{2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{x}}$ **b)** $\frac{24 - a}{2 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{a}}$ **c)** $\frac{m \cdot \sqrt{n} - n \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}$ **d)** $\frac{3 \cdot \sqrt{10} + 10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{10}}$ **e)** $\frac{4ab}{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}$ B

Potenzfunktionen

Aufgaben 2.125 – 2.126: Zeichne die Funktionen, spiegle die Graphen an der x-Achse und gib die Funktionsgleichungen der gespiegelten Graphen an.

2.125 **a)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **b)** $y = 2x^3$ **c)** $y = \frac{1}{4}x^{-2}$ **d)** $y = 3x^{-3}$ ABC

2.126 **a)** $y = -2x^2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x^3$ **c)** $y = -4x^{-2}$ **d)** $y = -\frac{1}{4}x^{-3}$ ABC

2.127 Skizziere die folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem. Überlege vorher, welche steiler bzw. flacher verlaufen. AB

a) $y_1 = x^2$, $y_2 = 0{,}2x^2$, $y_3 = 6x^2$
b) $y_1 = x^{-2}$, $y_2 = -x^{-2}$, $y_3 = 0{,}5x^{-2}$
c) $y_1 = 3x^3$, $y_2 = -0{,}75x^3$, $y_3 = x^3$
d) $y_1 = x^{-3}$, $y_2 = 0{,}1x^{-3}$, $y_3 = -3x^{-3}$

2.128 Gib den Scheitel der Parabel an. C

a) $y = (x + 3)^2 - 5$ **b)** $y = (x - 4)^2 + 1$ **c)** $y = (x - 1)^2 - 2$

2.129 Ermittle die fehlenden Konstanten b und c. Bestimme, ob a den Wert 1 oder –1 hat. Gib die Funktionsgleichung an. AC

a) $y = a \cdot (x - b) + c$ **b)** $y = a \cdot (x - b)^{-2} + c$

2.130 Beantworte deine Antwort für $n \in \mathbb{Z}$. D

1) Warum ist der Graph der Funktion $y = x^{2n}$ symmetrisch zur y-Achse?
2) Warum ist der Graph der Funktion $y = x^{2n + 1}$ punktsymmetrisch zum Ursprung?

2.131 Gib an, welche Kurve durch die Funktion $y = x^1$ beschrieben wird. D

2.132 In welchem Bereich liegen die Funktionswerte der gegebenen Funktionen $f_1(x) = x^n$, $f_2(x) = -x^n$ und $f_3(x) = (-x)^n$, wenn $D_f = \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist? Begründe deine Antwort. Triff dabei Fallunterscheidungen. D

Potenzen und Potenzfunktionen

Polynomfunktionen

BC **2.133** Zeichne den Graph einer Polynomfunktion mit den folgenden Eigenschaften:

a) Die Funktion hat den einzigen Hochpunkt bei H(4|1).
b) Die Funktion hat weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.
c) Die Funktion ist zuerst streng monoton steigend, dann streng monoton fallend und dann wieder streng monoton steigend.
d) Die Funktion hat fünf Nullstellen.
e) Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

D **2.134** Richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.

1) Der Graph der Funktion $y = x^3$ hat mindestens drei Nullstellen.
2) Der Graph der Funktion $y = 3x^4 - x^2 + 5$ ist symmetrisch zur x-Achse.
3) Die Definitionsmenge der Funktion $y = -4\,(x + 3)^{-2} + 6$ ist $D_f = \mathbb{R}$.
4) Die Gerade $y = 4$ ist eine Asymptote der Funktion $y = x^{-4}$.

Wurzelfunktionen

ABC **2.135** Der Weg s (in Meter), den ein frei fallender Körper in der Zeit t (in Sekunden) zurücklegt, lässt sich durch die Funktion $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ ($g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$) beschreiben. Gib die Funktion t(s) zur Berechnung der Zeit bei gegebenem Fallweg an. Stelle die Zusammenhänge in je einem Koordinatensystem dar.

ABC **2.136** Nach Verkehrsunfällen muss oft die Geschwindigkeit v, die das Fahrzeug vor der Bremsung hatte, anhand der Länge der Bremsspur s ermittelt werden. Dabei kann der Wert des Reibungskoeffizienten μ oft nur empirisch ermittelt werden. Zur Berechnung der Geschwindigkeit wird der Zusammenhang $\frac{m \cdot v^2}{2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$ verwendet ($g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$).

1) Gib die Funktionsgleichung v(s) an.
2) Stelle die Funktion grafisch dar für $\mu_1 = 0{,}4$, $\mu_2 = 0{,}8$ und $\mu_3 = 1{,}2$.
3) Nach einem Unfall wurde eine Bremsspur von 20 m gemessen. Der Fahrer behauptet, mit Schritttempo gefahren zu sein. Überprüfe die Richtigkeit dieser Behauptung mithilfe der Zeichnung aus **2)**, wenn ein Reibungskoeffizient von $\mu = 0{,}4$ angenommen werden kann. Recherchiere, welcher Geschwindigkeit „Schritttempo" entspricht.

Wurzelgleichungen

Aufgaben 2.137 – 2.140: Ermittle jeweils die Definitionsmenge, löse die Gleichung in $\mathbb{R}$, führe die Probe durch und gib die Lösungsmenge an.

B **2.137** **a)** $3 - \sqrt{x^2 - 3} = x$ **b)** $2s = 15 - \sqrt{4s^2 + 45}$ **c)** $9 - \sqrt{6 + x^2} = -x$

B **2.138** **a)** $\sqrt{9x^2 + 4} = 2 + 3x$ **b)** $\sqrt{\frac{x + 2}{2}} = 3$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{x^2 + 3}} = -5$

B **2.139** **a)** $\sqrt{x - 12} = 6 - \sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{2x - 10} + \sqrt{2x} = 5$ **c)** $\sqrt{0{,}5x - 8} = 4 + \sqrt{0{,}5x}$

B **2.140** **a)** $3 \cdot \sqrt{x - 2} = 2 \cdot \sqrt{x + 8}$ **b)** $6 \cdot \sqrt{x - 5} = \sqrt{x + 30}$ **c)** $\sqrt{26 + x} = 3 \cdot \sqrt{x - 6}$

Weitere Aufgaben in den Zusatzheften

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne den Unterschied zwischen „Potenz“ und „Exponent“.	
2	A) Die Potenz x^6 ist immer eine positive Zahl. ◯ wahr ◯ falsch B) $\sqrt[3]{-x}$ kann immer berechnet werden. ◯ wahr ◯ falsch C) Es gilt: $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[3]{x^4}$ ◯ wahr ◯ falsch D) Es gilt: $\sqrt[5]{a+b} = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b}$ ◯ wahr ◯ falsch E) Es gilt: $\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ◯ wahr ◯ falsch F) $y = x^n$ hat immer eine Nullstelle. ◯ wahr ◯ falsch G) $y = \sqrt{x}$ für $D_f = \mathbb{R}$ ◯ wahr ◯ falsch	
3	Addieren und Subtrahieren von Wurzeln ist nur möglich, wenn … A) die Wurzelexponenten gleich und die Radikanden verschieden sind. B) die Wurzelexponenten verschieden und die Radikanden gleich sind. C) die Wurzelexponenten gleich und die Radikanden gleich sind. D) die Wurzelexponenten verschieden und die Radikanden verschieden sind.	
4	Ich kann die folgenden Wurzelgleichungen lösen. A) $3 - \sqrt{x^2 - 3} = x$ B) $\sqrt{z + 14} + 2 = \sqrt{z - 6}$	
5	Gib die neue Funktionsgleichung an, wenn A) der Graph von $y = x^4$ drei Einheiten nach oben verschoben wird. B) der Graph von $y = 2x^{-3}$ sechs Einheiten nach links verschoben wird. C) der Graph von $y = x^5$ zwei Einheiten nach unten und vier Einheiten nach links verschoben wird.	
6	Ich kann die Begriffe „Polynom“ und „Polynomfunktion“ erklären.	
7	$\frac{1}{\sqrt[4]{m^3}}$ kann dargestellt werden als A) $\frac{\sqrt[4]{m}}{m}$ B) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m}}\right)^3$ C) $\left(\frac{1}{m^3}\right)^4$ D) $\sqrt[4]{\frac{1}{m^3}}$	
8	$\sqrt{n} + \sqrt{9n}$ kann dargestellt werden als A) $\sqrt{10n}$ B) $\sqrt{9n^2}$ C) $4 \cdot \sqrt{n}$ D) $4 \cdot \sqrt[8]{n^4}$	
9	Ein gleichseitiger Kegel hat das Volumen V. Gib an, welche Gleichung den Zusammenhang zwischen Radius und Volumen richtig beschreibt. A) $r(V) = \sqrt{\frac{2\pi}{3V}}$ B) $r(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$ C) $r(V) = \sqrt[4]{\frac{2V}{3\pi}}$	

Lösung:
1) Potenz x^n mit dem Exponenten n 2) A) wahr, B) wahr, C) falsch, D) falsch, E) falsch, F) falsch, G) falsch
3) C) 4) A) $x = 2$, B) $L = \{\,\}$ 5) A) $y = x^4 + 3$, B) $y = 2\,(x + 6)^{-3}$, C) $y = (x + 4)^5 - 2$ 6) siehe Seite 32
7) A) B) und D) 8) C) und D) 9) B)

3 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Im naturwissenschaftlichen Unterricht wurden bereits Zusammenhänge behandelt, bei denen die Änderung einer Größe vom Quadrat einer anderen Größe abhängt. Zum Beispiel nimmt der Weg beim freien Fall mit dem Quadrat der Zeit zu oder die Beleuchtungsstärke mit dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle ab.

Daher werden nun Funktionen mit einer quadratischen Veränderlichen genauer untersucht.

3.1 Quadratische Funktionen

3.1.1 Funktionsgleichungen von Parabeln

BC **3.1** Beim Reinigen der Scheiben des Millenniumtowers fällt aus 137 m Höhe eine Putzmittelflasche hinunter. Dieser Vorgang kann unter Vernachlässigung des Luftwiderstands durch die Weg-Zeit-Funktion $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ ($g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$) beschrieben werden.

1) Erstelle eine Wertetabelle für t = 0 s, t = 1 s, t = 2 s usw. und zeichne den Funktionsgraphen. Nach welcher Zeit kommt die Flasche auf dem Boden auf?

2) Um welchen Funktionstyp handelt es sich dabei?

Eine Funktion der Form $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ heißt **quadratische Funktion** oder **Polynomfunktion 2. Grads**.

Die „einfachste" quadratische Funktion ist die Funktion $y = x^2$.

x	$y = x^2$
−2	$(-2)^2 = 4$
−1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**. Sie ist symmetrisch zu einer senkrechten Achse. Der Schnittpunkt mit der Symmetrieachse ist ihr Scheitel S, der auch der tiefste bzw. der höchste Punkt der Parabel ist.

Die Parabel ist eine wichtige geometrische Figur. Sie entsteht zum Beispiel beim Schnitt eines Drehkegels mit einer Ebene, die dieselbe Neigung wie die Drehkegelerzeugende hat.

Eine wichtige Eigenschaft der Parabel ist die so genannte Brennpunkteigenschaft. Sie besagt, dass parallel zur Parabelachse a verlaufende Strahlen an der Parabel so reflektiert werden, dass sie in einem Punkt, dem Brennpunkt F, gebündelt werden.

Diese Eigenschaft wird zum Beispiel – in umgekehrter Richtung – bei Scheinwerfern genutzt.

Der Graph der Funktion $y = x^2$ wird meist als **Grundparabel** bezeichnet. Im Weiteren wird der Einfluss von verschiedenen Parametern auf diesen Graphen untersucht.

Parabeln der Form $y = a \cdot x^2$

3.2 Stelle die Funktion $y = a \cdot x^2$ für $a = 2$, $a = 4$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$ und $a = -2$ grafisch dar. Beschreibe, welchen Einfluss der Faktor a auf die Gestalt der Parabel hat.

BD

Parabeln der Form $y = a \cdot x^2$ verlaufen durch den Koordinatenursprung.

Der **Faktor a** beeinflusst die **Form der Parabel**, zum Beispiel bewirkt $a = 2$ eine Verdopplung der Funktionswerte. Der Graph fällt bzw. steigt daher schneller an und ist schmäler als die Grundparabel. Gilt $0 < |a| < 1$, so fällt bzw. steigt der Graph langsamer, die Parabel ist breiter als die Grundparabel. Ist $a < 0$, so wird die Parabel an der x-Achse gespiegelt.

- **$0 < |a| < 1$:** Die Parabel ist **breiter** als die Grundparabel.
- **$|a| > 1$:** Die Parabel ist **schmäler** als die Grundparabel.
- **$a < 0$:** Die Parabel ist **nach unten geöffnet**.

Den Faktor a kann man ablesen, indem man vom Scheitelpunkt ausgehend eine Einheit nach rechts geht und von dort aus die Länge der Senkrechten bis zur Parabel ermittelt, zB $a = 2$.

Darstellung mithilfe des TI-Nspire:

Will man die Graphen der Funktion $y = a \cdot x^2$ für verschiedene Werte von a darstellen, so wird der Parameter als Variable eingegeben. Die Werte der Variablen können zum Beispiel mithilfe eines Schiebereglers (Menü **1: Aktionen**, **A: Schieberegler einfügen**) verändert werden. Der Anfangs- und Endwert sowie die Schrittweite können in den **Eigenschaften** eingestellt werden.

Excel, GeoGebra: www.verlaghpt.at

Verschiebung entlang der Achsen

Parabeln der Form $y = x^2 + c$

Der Wert von c gibt die Verschiebung in **y-Richtung** an.
Die Funktionswerte werden erhöht ($c > 0$) bzw. vermindert ($c < 0$).

- **$c > 0$**: Die Parabel wird um c Einheiten in positive y-Richtung verschoben.
- **$c < 0$**: Die Parabel wird um $|c|$ Einheiten in negative y-Richtung verschoben.

Parabeln der Form $y = (x - b)^2$

Der Wert von b gibt die Verschiebung in **x-Richtung** an.
Da sich die Veränderung auf die Variable bezieht, erhält man dieselben Funktionswerte an anderer Stelle. ZB: $y = (x - 1)^2$, $y = 0$: $x = 1$

- **$b > 0$**: Die Parabel wird um b Einheiten in positive x-Richtung verschoben.
- **$b < 0$**: Die Parabel wird um $|b|$ Einheiten in negative x-Richtung verschoben.

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Wird eine Parabel in x- und y-Richtung verschoben, dann lautet ihre Gleichung
$\mathbf{y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$.
Diese Form wird als **Scheitelpunktform** bezeichnet. Der Scheitel hat die Koordinaten $\mathbf{S(x_S|y_S)}$.

ZB: $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2 - 1$

Die Parabel ist aufgrund des Faktors $\frac{1}{2}$ breiter als die Grundparabel.
Der Scheitel hat die Koordinaten $S(2|-1)$. Die Parabel ist daher um 2 Einheiten in positive x-Richtung und um 1 Einheit in negative y-Richtung verschoben.

$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2 - 1$
S (2|−1)

Die Gleichung kann durch Ausmultiplizieren auch in der Form $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, die **Polynomform** genannt wird, angegeben werden. Für $x = 0$ erhält man den Schnittpunkt mit der y-Achse, hier $y = 1$. Dieser Wert kann direkt aus der Polynomform abgelesen werden.

Funktionsgleichungen von Parabeln

Scheitelpunktform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ ... Scheitel $S(x_S|y_S)$,

$a \neq 0$ bzw. $a_2 \neq 0$

Polynomform: $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ bzw. $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$a_2 \cdot x^2$ ... quadratisches Glied, $a_1 \cdot x$ ... lineares Glied, a_0 ... konstantes Glied

Die Parabel ist der Graph einer **quadratischen Funktion (Polynomfunktion 2. Grads)**.

Der Koeffizient a_2 der Polynomform entspricht dem Koeffizienten a der Scheitelpunktform.
a_0 gibt an, in welcher Höhe die senkrechte Achse von der Parabel geschnitten wird.

Ist die Gleichung der Parabel in Polynomform gegeben und der Scheitel gesucht, so kann die Gleichung mithilfe der **quadratischen Ergänzung** umgeformt werden.

ZB: $y = x^2 + 8x + 21$
$y = (x + 4)^2 \underbrace{- 16 + 21}$
$y = (x + 4)^2 + 5$
$S(-4|5)$

- Binomische Formel: $x^2 + 2bx + b^2 = (x + b)^2$
  $x^2 + \underbrace{8x}_{2bx} = (x + 4)^2 - 16$
  $2bx \Rightarrow b = 4$
  Damit der ursprüngliche Term unverändert bleibt, muss $b^2 = 16$ wieder subtrahiert werden.

ABC **3.3** Die Grundparabel wird an der x-Achse gespiegelt, um 1 Einheit in negative x-Richtung und um 2 Einheiten in positive y-Richtung verschoben. Gib die Funktionsgleichung der entstehenden Parabel an. In welcher Höhe schneidet die Parabel die y-Achse? Überprüfe mithilfe einer Zeichnung.

Lösung:
$a = -1, S(-1|2) \Rightarrow y = -(x + 1)^2 + 2$
$y = -x^2 - 2x + 1$
Die Höhe des Schnittpunkts mit der y-Achse wird durch das konstante Glied $a_0 = 1$ angegeben.

ABC **3.4** Gib die Gleichung der Parabel an, deren Scheitel im Koordinatenursprung liegt und die durch den Punkt $P(2|1)$ verläuft. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung:
$y = a \cdot x^2$
$1 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
Parabelgleichung: $y = \frac{1}{4}x^2$

Da der Scheitel im Koordinatenursprung liegt, hat die Parabel die Funktionsgleichung $y = a \cdot x^2$. Danach werden die Koordinaten des Punkts P eingesetzt und die Gleichung nach a gelöst.

3.5 Der Scheitel einer Parabel, die durch den Koordinatenursprung verläuft, liegt in S(−3|−2). Gib die Funktionsgleichung der Parabel an und dokumentiere deine Überlegungen.

ABC

Lösung:

$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$
$y = a \cdot (x + 3)^2 - 2$
$0 = a \cdot (0 + 3)^2 - 2 \Rightarrow a = \frac{2}{9}$
$y = \frac{2}{9} \cdot (x + 3)^2 - 2$

Da der Scheitel gegeben ist, wird die Scheitelpunktform verwendet. Es gilt: $x_S = -3$ und $y_S = -2$
Anschließend werden die Koordinaten (0|0) des Koordinatenursprungs eingesetzt und a berechnet.

3.6 Wandle von der Polynomform in die Scheitelpunktform um und gib die Koordinaten des Scheitels an: $y = 3x^2 - 12x + 2$

BC

Lösung:

$y = 3x^2 - 12x + 2$
$y = 3 \cdot \left(x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right)$
$y = 3 \cdot \left((x - 2)^2 - 4 + \frac{2}{3}\right)$
$y = 3 \cdot \left[(x - 2)^2 - \frac{10}{3}\right]$
$y = 3 \cdot (x - 2)^2 - 10 \Rightarrow S(2|-10)$

- Koeffizient von x^2 herausheben
- Quadratische Ergänzung:
  $\underbrace{x^2 - 4x}_{2 \cdot 2} = (x - 2)^2 - 4$

3.7 Gib die Gleichung der Parabel an, die durch die Punkte P(−1|0), Q(1|4), R(3|12) verläuft.

B

Lösung:

P(−1|0) ... I: $0 = a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0$
Q(1|4) ... II: $4 = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$
R(3|12) ... III: $12 = a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0$

I: $0 = a_2 - a_1 + a_0$
II: $4 = a_2 + a_1 + a_0$ (−)
II − I: $4 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 2$

I: $0 = a_2 - 2 + a_0$
III: $12 = 9a_2 + 6 + a_0$ (−)
III − I: $12 = 8a_2 + 8 \Rightarrow 4 = 8a_2 \Rightarrow a_2 = 0{,}5$

I: $0 = 0{,}5 - 2 + a_0 \Rightarrow a_0 = 1{,}5$

Parabelgleichung: $y = 0{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$

- Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$
- Wir lösen das Gleichungssystem nach a_0, a_1 und a_2 und erhalten somit die Koeffizienten der Parabelgleichung: $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

3.8 Löse Aufgabe **3.7** mithilfe von Technologieeinsatz. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

BC

TE
Mathcad: www.verlaghpt.at

Lösung mit TI-Nspire:

1.1 *Nicht gespeicherte
$f(x) := a2 \cdot x^2 + a1 \cdot x + a0$ Fertig
$\text{linSolve}\left(\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(1)=4 \\ f(3)=12 \end{cases}, \{a2,a1,a0\}\right)$ $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right\}$

System linearer Gleichungen lösen
Anzahl der Gleichungen: 3
Variablen: a2, a1, a0

Die Funktionsgleichung wird gespeichert. Anschließend werden die Koordinaten der Punkte als Funktionswerte angeschrieben:
P(−1|0) ... f(−1) = 0
Q(1|4) ... f(1) = 4
R(3|12) ... f(3) = 12
Das Gleichungssystem mit den Variablen a2, a1 und a0 wird mit **linSolve** gelöst.
$y = 0{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Interpolation

Kennt man von einer Funktion zum Beispiel aus einer Messreihe nur einzelne Wertepaare, aber nicht deren Funktionsgleichung, so kann man zusätzliche Wertepaare näherungsweise mithilfe einer Interpolation ermitteln. Dabei legt man durch die vorhandenen Punkte eine Kurve möglichst einfacher Bauart und ermittelt weitere Punkte aufgrund dieses Modells.

Bei der **linearen Interpolation** ersetzt man den Funktionsgraphen zwischen jeweils zwei Punkten durch Geradenstücke. Zwischenwerte können nun näherungsweise als Punkte auf diesen Geradenstücken ermittelt werden. Fehlende Werte können mithilfe des Differenzenquotienten (vergleiche Band 1, Abschnitt 5) berechnet werden.

ZB: $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_P - y_2}{x_P - x_2}$

Anstelle der Geradenstücke können auch Parabelstücke verwendet werden. Dabei wird die Parabel durch drei Punkte gelegt. Man spricht dann von **quadratischer Interpolation**.

BC **3.9** Der Zusammenhang zwischen zwei Größen wurde durch Messwerte erfasst. Der Funktionswert an der Stelle x = 2 soll näherungsweise ermittelt werden.

x	1	3	4
y	1	8	14

1) Trage die Werte in ein Koordinatensystem ein und verbinde die Punkte durch Geradenstücke. Ermittle den gesuchten Funktionswert durch lineare Interpolation.

2) Ermittle den gesuchten Funktionswert näherungsweise durch quadratische Interpolation. Stelle die Parabel im Koordinatensystem aus ***1)*** grafisch dar.

3) Vergleiche die Ergebnisse.

Lösung:

1)

$\frac{8-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$ • Differenzenquotient bilden

$\frac{7}{2} = \frac{y-1}{1}$

$y = 4{,}5$ • Mittels linearer Interpolation angenäherter Funktionswert

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ • Funktionsgleichung

$f(1) = 1: \quad a + b + c = 1$ • Gleichungssystem aufstellen und zum Beispiel mit Technologieeinsatz lösen

$f(3) = 8: \quad 9a + 3b + c = 8$

$f(4) = 14: \quad 16a + 4b + c = 14$

$f(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x$ • Funktionsgleichung

$f(2) = \frac{11}{3} \approx 3{,}67$ • Mittels quadratischer Interpolation angenäherter Funktionswert

3) Der Funktionswert bei Verwendung der quadratischen Interpolation ist kleiner. Welcher Wert besser ist, kann aufgrund der wenigen gegebenen Punkte nicht entschieden werden.

3.10 Skizziere die Grundparabel und die gegebene Parabel, ohne eine Wertetabelle zu erstellen. Interpretiere den Einfluss der jeweiligen Parameter auf die Lage und die Form der Parabel. BC

a) $y = 3x^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$ **c)** $y = -2x^2 + 1$ **d)** $y = -(x - 3)^2$

3.11 Ändere die Funktionsgleichung der Parabel $y = x^2$ so ab, dass ihr Graph **1)** schmäler, **2)** breiter wird.
Überprüfe deine Wahl mithilfe von Technologieeinsatz. AB

3.12 Stelle die Funktion $f(x) = (x - b)^2$ für **1)** $b = 0$, **2)** $b = 2$ und **3)** $b = -2$ im Bereich $[-4; 4]$ dar und beschreibe den Unterschied. BC

3.13 Gib den Scheitelpunkt der Parabel an und zeichne den Funktionsgraphen. BC

a) $y = \frac{1}{6} \cdot (x - 9)^2 + 5$ **c)** $y = -5 \cdot (x - 2)^2$ **e)** $y = (x + 1)^2$ **g)** $y = (3 - x)^2 + 4$

b) $y = 3 \cdot (2 - x)^2 - 1$ **d)** $y = (1 - x)^2$ **f)** $y = 5 - x^2$ **h)** $y = -7 \cdot (x + 1)^2 - 12$

3.14 Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel? C

a) $y = (x + r)^2 - s$ **b)** $y = (x - t)^2 + n$ **c)** $y = (w - x)^2 - v$ **d)** $y = (k + x)^2 + c$

3.15 Welche der Funktionsgleichungen kommen für die dargestellte Parabel nicht in Frage? Erkläre, woran du dies erkennen kannst. ACD

a)
1) $y = (x - 2)^2 + 1$
2) $y = (x + 2)^2 + 1$
3) $y = (x - 2)^2 - 1$
4) $y = (x + 2)^2 - 1$

b)
1) $y = x^2 + 2x - 3$
2) $y = -x^2 + 2x - 3$
3) $y = x^2 + 2x + 3$
4) $y = -x^2 + 2x + 3$

3.16 Gib eine möglichst einfache Funktionsgleichung aller Parabeln an, die die gegebene Bedingung erfüllen. Überlege dazu, welche Parameter durch die Bedingung festgelegt sind. AC

a) Die Grundparabel wurde nach oben verschoben.
b) Der Scheitel der Parabel liegt auf der x-Achse.
c) Der Scheitel der Parabel liegt im Koordinatenursprung.
d) Der Scheitel der Parabel liegt auf der y-Achse.

3.17 Wandle die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um und gib die Koordinaten des Scheitels an. BC

a) $y = 2x^2 + 20x - 4$ **c)** $f(a) = -a^2 - 16a + 12$ **e)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

b) $v(t) = t^2 + 6t - 2$ **d)** $g(n) = n^2 - n - 1$ **f)** $h(b) = -b^2 + 28b - 4$

3.18 Ordne jedem Graphen die richtige Funktionsgleichung zu und gib die fehlende Funktion an. AC

a) **1)** $y = -(x - 3{,}5)^2$ **2)** $y = 0{,}5 \cdot (x + 2)^2 + 1$ **3)** $y = -(x - 1{,}5)^2 + 4$

b) **1)** $y = -(x + 2)^2$ **2)** $y = -4 \cdot (x - 2)^2 + 5$ **3)** $y = \frac{1}{2} \cdot (x + 1)^2 - 1$

a)

b)

C **3.19** Gib die Gleichungen der abgebildeten Parabeln in der Form $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ an.

a) **b)**

ABC TE **3.20** Gib die Funktionsgleichung der beschriebenen Parabel an und bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse. Kontrolliere mithilfe einer Zeichnung.

a) Die Funktionswerte wachsen doppelt so schnell wie die der Grundparabel und der Scheitel ist im Punkt S(3|–1).

b) Die Grundparabel wurde an der x-Achse gespiegelt und um 2 Einheiten nach links und um 1 Einheit nach unten verschoben.

c) Die Funktionswerte wachsen um ein Viertel langsamer als die der Grundparabel und sie wurde um 4 Einheiten in positive x-Richtung verschoben.

Aufgaben 3.21 – 3.25: Gib jeweils die Funktionsgleichung der Parabel an. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

ABC **3.21** Die Parabel entsteht durch Verschiebung von $y = x^2$ in den gegebenen Scheitelpunkt S.

a) S(1|1) **b)** S(4|0) **c)** S(–3|2) **d)** S(8|5) **e)** S(–1|–4) **f)** S(0|–7)

ABC **3.22** Der Scheitel der Parabel liegt im Koordinatenursprung und sie verläuft durch den Punkt P.

a) P(3|27) **b)** P(4|32) **c)** P(–6|4) **d)** P(8|8) **e)** P(–1|–10) **f)** P(2|–4)

ABC **3.23** Der Scheitel der Parabel liegt im Punkt S und sie verläuft durch den Punkt P.

a) S(1|2), P(0|0) **b)** S(–3|1), P(2|5) **c)** S(–1|–1), P(0|3)

ABC **3.24** Die Parabel entsteht durch Verschiebung von $y = x^2$ durch die gegebenen Punkte.

a) P(–2|1), R(4|4) **b)** P(1|35), R(–2|8) **c)** P(–3|–3), R(1|–3) **d)** P(5|8), R(6|1)

ABC **3.25** Die Parabel verläuft durch die drei gegebenen Punkte.

a) P(0|–8), Q(2|5), R(–2|–13)

b) $P\left(-1\middle|\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(1\middle|\frac{3}{2}\right)$, R(2|8)

c) P(–3|–11), Q(0|–1), R(3|–9)

d) $P\left(\frac{1}{5}\middle|1\right)$, $Q\left(-1\middle|\frac{11}{5}\right)$, R(5|25)

ABC TE **3.26** Bei einer Messreihe ergeben sich die in der Tabelle aufgezeichneten Messwerte. Zusätzlich benötigt man die Funktionswerte für x_1 und x_2.

1) Gib eine Näherung mithilfe linearer Interpolation an.

2) Gib eine Näherung mithilfe quadratischer Interpolation an.

3) Stelle die Geradenstücke bzw. die Parabel grafisch dar. Vergleiche die Werte und beschreibe die Unterschiede.

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 7$

x	0	3	8
y	1	5	6

b) $x_1 = 10$, $x_2 = 30$

x	2	20	35
y	320	400	700

3.27 Eine Hängebrücke hat annähernd die Form einer Parabel. Gib die Gleichung dieser Parabel an, wenn der Koordinatenursprung im Scheitel der Parabel gewählt wird. AB

a) Storebælt-Brücke (Dänemark): w = 1 624 m, h = 65 m

b) Akashi-Kaikyō-Brücke (Japan): w = 1 991 m, h = 65,72 m

c) Golden Gate Bridge (San Francisco): w = 1 280 m, h = 67 m

3.28 Der Querschnitt eines Salzstreuers (Abb. 3.1) hat die Form einer Parabel. Gib die zugehörige Parabelgleichung an. AB

Abb. 3.1

3.29 Die obere Abschlusskante der in Abb. 3.2 dargestellten Sessellehne ist parabelförmig. ABC

Abb. 3.2

Arbeitet in einer Kleingruppe. Ermittelt die Gleichung, wenn

1) der Koordinatenursprung im Scheitel liegt.

2) die x-Achse auf der unteren Linie liegt und die y-Achse die Symmetrieachse ist.

3) der Koordinatenursprung im Punkt P liegt.

Vergleicht eure Ergebnisse und beschreibt die Unterschiede der Funktionsgleichungen. Stellt die Parabeln anschließend grafisch dar.

3.30 Sucht zu zweit in eurer Umgebung einen Gegenstand, der (annähernd) parabelförmig ist. Überlegt, welche Maße ihr messen müsst, um die Parabel festzulegen. Fertigt eine maßstäbliche Skizze an und legt anschließend ein Koordinatensystem fest. Ermittelt die Funktionsgleichung der Parabel und zeichnet den Graphen. Vergleicht diesen mit der Skizze des Gegenstands bzw. dem Gegenstand selbst. Präsentiert eure Ergebnisse. ABCD

3.31 ***1)*** Gib die Funktionsgleichung des abgebildeten Brückenbogens an. (Maße in m) ABC

2) Berechne die Höhen der Stützen.

3) In einer Höhe von 20 m soll ein Transparent gespannt werden. Wie lang muss das Spannseil mindestens sein?

3.32 Die Gebissform vieler Menschen hat annähernd die Form einer Parabel. Gib eine Funktionsgleichung an, welche die Form deines Untergebisses beschreibt. Überlege zuvor, wie du einen Abdruck deines Gebisses anfertigen kannst. AB

3.33 Ein Fenster ist parabelförmig mit 4 m Höhe und einer unteren Breite von 3 m. ABD

1) Stelle die Funktionsgleichung der Parabel auf. Wähle das Koordinatensystem dabei so, dass die Funktionsgleichung möglichst einfach wird.

2) Kann man auf die Fensterscheibe ein rechteckiges Plakat kleben, das 1,8 m breit und 2,3 m hoch ist? Begründe deine Antwort.

3.34 Der Wasserstrahl einer Spritzpistole hat die Form einer Parabel, deren Scheitel die Koordinaten S(2|2,6) hat. Anton hält die Spritzpistole so, dass der „Start“ des Wasserstrahls die Koordinaten A(0|1,6) hat (alle Angaben in Meter). ABCD

1) Gib die Gleichung der zugehörigen Parabel an.

2) Wie weit von Anton entfernt trifft der Wasserstrahl auf den Boden?

3) Anton möchte, dass der Wasserstrahl knapp über seine Schwester Coline, die 4,5 m von ihm entfernt steht und 150 cm groß ist, verläuft. Gib drei verschiedene Möglichkeiten an, den Verlauf des Wasserstrahls zu verändern.

3.1.2 Anwendungen quadratischer Funktionen

Mathematische Modelle entsprechen der Realität nur innerhalb gewisser Grenzen, weil sie im Allgemeinen Vereinfachungen darstellen. Viele Vorgänge lassen sich jedoch durch quadratische Funktionen ausreichend genau beschreiben.

Bei praktischen Anwendungen beschreibt oft nur ein Teil der Parabel den gegebenen Sachverhalt, die Definitionsmenge ist dann entsprechend anzugeben.

ABCD **3.35** Eine Heuschrecke springt in ebenem Gelände unter einem Winkel von 45° ab. Ihre Flugbahn wird durch folgende Funktion beschrieben.

$y = x - \frac{1}{50\text{ cm}}x^2$, $x \geq 0$ cm (x ... Sprungweite in cm, y ... Sprunghöhe in cm)

1) Um welchen Funktionstyp handelt es sich? Gib die Werte der auftretenden Parameter an und beschreibe deren Einfluss.

2) Stelle mithilfe einer Wertetabelle (für x = 0 cm, x = 5 cm usw.) die Funktion grafisch dar.

3) Gib an, wie weit und wie hoch die Heuschrecke maximal springt. Welchen speziellen Stellen entsprechen diese Werte?

4) Nach welcher Sprungweite befindet sich die Heuschrecke in einer Höhe von 8 cm?

Lösung:

1) Die Funktion ist eine quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ mit $a = -\frac{1}{50}$, b = 1 und c = 0. Da $a < 0$ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet und da c = 0 ist, verläuft die Parabel durch den Koordinatenursprung.

2)

x in cm	y in cm
0	0
5	4,5
10	8
15	10,5
20	12
25	12,5
30	12
35	10,5
40	8
45	4,5
50	0

3) Der Sprung ist beendet, wenn die Heuschrecke am Boden aufkommt. Die Sprungweite entspricht daher einer Nullstelle.
Die maximale Sprunghöhe ist die y-Koordinate des Scheitels

Die Heuschrecke springt 50 cm weit und 12,5 cm hoch.

- Die Nullstelle kann aus der Tabelle oder dem Graphen ermittelt werden.
- Der Scheitel befindet sich in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen. Er kann auch durch Ablesen ermittelt werden.

4) y = 8 cm
Die beiden Sprungweiten betragen 10 cm und 40 cm.

- Die Gerade y = 8 wird eingezeichnet und die Schnittstellen mit der Parabel werden ermittelt.

3.36 Eine Kugel wird von der Europabrücke (Tirol) aus 180 m Höhe mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 7\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben geworfen und fällt dann auf den Boden unter der Brücke. Die momentane Höhe h der Kugel wird durch folgende Funktion beschrieben: $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$ mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, t ... Zeit in Sekunden

BC

TI-Nspire, Mathcad: www.verlaghpt.at

a) Bestimme die maximale Höhe der Kugel über dem Boden.

b) Nach wie viel Sekunden trifft die Kugel am Boden auf?

Lösung mit GeoGebra:

a) und ***b)***

Die Funktion beschreibt die Höhe für positive Werte von t.

- Die maximale Höhe wird mithilfe des Befehls **Extremum[h]** ermittelt.
- Die Nullstelle erhält man mit dem Befehl **Nullstelle**, wobei hier ein Bereich vorgegeben werden kann. **Nullstelle[h,6,8]**

Die Kugel erreicht eine maximale Höhe von rund 182,5 m und landet nach rund 6,81 Sekunden auf dem Boden.

Bemerkung: Das Maximum bzw. Minimum einer Funktion kann grafisch oder durch Ermitteln des Scheitels der Parabel bestimmt werden. Mithilfe der Differentialrechnung (siehe Band 3) lassen sich Maximum bzw. Minimum einer beliebigen Funktion auch rechnerisch ermitteln.

3.37 Ein Ball wird mit unterschiedlichen Abwurfgeschwindigkeiten senkrecht nach oben geworfen. Die Höhe zum Zeitpunkt t ist durch $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ gegeben (t ... Zeit in Sekunden, h ... Höhe in Meter). Stelle die Funktionsgraphen dar und ermittle jeweils die maximale Höhe für

B

1) $v_0 = 1\,\frac{m}{s}$, ***2)*** $v_0 = 5\,\frac{m}{s}$, ***3)*** $v_0 = 10\,\frac{m}{s}$, ***4)*** $v_0 = 20\,\frac{m}{s}$.

3.38 Mit dem Beach-Ball-Schläger trifft Sandra den Ball so, dass er senkrecht nach oben steigt. Der Ball prallt vom Schläger in 1 m Höhe mit der Geschwindigkeit $v_0 = 14\,\frac{m}{s}$ ab und fällt nach einiger Zeit wieder auf den Boden zurück.

ABC

Die Ballhöhe lässt sich durch die Funktion $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$ mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ beschreiben (t ... Zeit in Sekunden, h ... Höhe in Meter).

1) Welche Größe gibt der Parameter h_0 an und welchen Wert hat er?

2) Nach wie viel Sekunden trifft der Ball auf dem Boden auf?

3) Für welche Werte von t beschreibt die Gleichung den Flug?

4) Wie hoch schießt Sandra den Ball in die Luft?

3.39 Skizziere den Graphen der angegebenen Funktionen, wobei $h_0 > 0$ und $v_0 > 0$ gilt. Welche Art von Bewegung wird beschrieben, wenn t für die Zeit, s für den Weg und h für die Höhe steht?

BC

1) $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$ ***3)*** $h(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$ ***5)*** $h(t) = h_0 - v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

2) $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ ***4)*** $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$

ABCD

TE

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

3.40 Bei der Produktion von Schmuckstücken setzten sich die Kosten aus Fixkosten von 150 GE (Geldeinheiten) und variablen Kosten von 2 GE pro Stück zusammen. Die Preisfunktion p gibt den Preis in Abhängigkeit von der Stückzahl x an und wurde mit $p(x) = 50 - x$ ermittelt.

1) Erkläre die Begriffe lineare Kostenfunktion K, Erlösfunktion E und Gewinnfunktion G und gib jeweils die Funktionsgleichung allgemein an.

2) Gib für die gegebene Produktion die Kosten-, die Erlös- und die Gewinnfunktion an.

3) Stelle K, E und G in einem Diagramm grafisch dar. Erkläre den Zusammenhang zwischen den drei Funktionen anhand der Grafik.

4) Die Stückzahl, ab der Gewinn erzielt wird, nennt man Gewinnschwelle und jene, bis zu der Gewinn gemacht wird, Gewinngrenze. Wie können diese Werte ermittelt werden? Gib die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze an.

5) Bei welcher Stückzahl wird maximaler Gewinn erzielt? Wie groß ist dieser und um welchen Preis wird ein Schmuckstück dann verkauft?

Lösung mit TI-Nspire:

1) Die Kostenfunktion gibt an, welche Kosten bei der Produktion einer bestimmten Menge x anfallen. Ist sie linear, so gilt: $K(x) = \text{Fixkosten} + \text{variable Kosten} \cdot x$
Der Erlös ergibt sich aus dem Preis und der Anzahl der verkauften Stück: $E(x) = p(x) \cdot x$
Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Kosten: $G(x) = E(x) - K(x)$

2) $K(x) = 150 + 2x$
$E(x) = (50 - x) \cdot x = 50x - x^2$
$G(x) = E(x) - K(x) = -x^2 + 48x - 150$

k(x):=150+2·x Fertig
e(x):=(50−x)·x Fertig
g(x):=e(x)−k(x) Fertig
g(x) −x^2+48·x−150

3)

f2(x)={e(x),x≥0
f3(x)={g(x),x≥0
f1(x)={k(x),x≥0

Eingabe zB: **f1(x)=k(x)|x≥0**

Für jede Stückzahl x entspricht die Differenz $E(x) - K(x)$ dem Wert von $G(x)$.

4) und **5)**

(24, 426) (3.36, 157) (3.36, 0) (44.6, -5.82E-11)

Die Werte können mithilfe der Nullstellen der Gewinnfunktion oder der Schnittpunkte zwischen der Erlös- und Kostenfunktion ermittelt werden.
(Menü **6: Graph analysieren**, **1: Nullstelle** oder **4: Schnittpunkt**)
Gewinnschwelle: $x_1 = 3{,}36 \Rightarrow$ 4 Stück, da nur ganze Stück möglich sind und bei 3 Stück noch kein Gewinn erzielt wird.
Gewinngrenze: $x_2 = 44{,}6 \Rightarrow$ 44 Stück

Maximaler Gewinn: 426 GE bei 24 Stück
Verkaufspreis: $p(24) = 26$ GE

3.41 Eine Skifahrerin fährt einen 90 m langen Hang geradlinig hinab und wird immer schneller. Der Weg, den sie dabei zurücklegt, beträgt $s(t) = 2{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ (t in Sekunden, s in Meter).

AB

1) Wie viel Meter hat sie nach 1 Sekunde bzw. nach 5 Sekunden zurückgelegt?

2) Berechne, wie viel Zeit sie für das erste, das zweite und das letzte Drittel bzw. für die gesamte Strecke von 90 m jeweils benötigt.

3) Um wie viel $\frac{m}{s}$ ist die mittlere Geschwindigkeit im letzten Streckendrittel höher als im ersten?

3.42 Der Bremsweg s, den ein Fahrzeug bei einer bestimmten Geschwindigkeit v zurücklegt, kann durch die Funktion $s(v) = k \cdot v^2$ beschrieben werden (v in $\frac{m}{s}$, s in Meter). Ein Auto, das mit einer Geschwindigkeit $v = 30\,\frac{km}{h}$ fährt, hat einen Bremsweg von 8,9 m.

ABCD

1) Bestimme den Faktor k.

2) Berechne den Bremsweg bei einer Geschwindigkeit von $50\,\frac{km}{h}$ und bei $70\,\frac{km}{h}$.

3) Mit welcher Geschwindigkeit war das Auto unterwegs, wenn der Bremsweg eine Länge von 20 m bzw. von 40 m hat?

4) Um wie viel Meter verändert sich der Bremsweg, wenn die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von $50\,\frac{km}{h}$ um $5\,\frac{km}{h}$ überschritten wird?

5) Der Anhalteweg ist die Summe aus Reaktionsweg und Bremsweg. Für die Reaktionszeit kann eine Sekunde angenommen werden. In dieser Zeit fährt das Auto noch ungebremst weiter. Wie lang ist der Anhalteweg bei $50\,\frac{km}{h}$, $100\,\frac{km}{h}$ und $130\,\frac{km}{h}$? Gib eine Formel zur Berechnung des Anhaltewegs an. Finde für die jeweilige Streckenlänge eine vergleichbare Strecke aus der Umgebung deines Schulgebäudes.

6) Bei einem Versuch wird der Bremsweg von zwei gleich schnellen Autos ($v = 30\,\frac{km}{h}$) ermittelt. Der Bremsweg des ersten Autos beträgt 9,1 m, der des zweiten 10,5 m. Berechne jeweils den Faktor k. Wovon ist die Länge des Bremswegs abhängig? Recherchiere mögliche Berechnungsformeln für den Bremsweg.

3.43 Auf dem Planeten Curioso soll mithilfe eines Versuchsaufbaus die Fallbeschleunigung g_C ermittelt werden. Dazu wird ein Stein aus einer Höhe h_0 fallengelassen. In zwei verschiedenen Höhen wird die Fallzeit bis zu dieser Höhe gemessen. Für die momentane Höhe h gilt: $h(t) = h_0 - \frac{g_C}{2} \cdot t^2$ (g_C in $\frac{m}{s^2}$, t in s, h_0 in m). Berechne g_C.

Höhe (m)	Fallzeit (s)
18	1,30
2	2,91

AB

3.44 Der Torwart schießt beim Ausschuss vom Ende des Strafraums (16 m) den Ball mit einer Geschwindigkeit von $110\,\frac{km}{h}$ unter dem Winkel α in Richtung des gegnerischen Tors.

ABCD

TE

1) Stelle die Flugbahn des Fußballs für α = 30°, 45° und 60° dar. Was fällt dir auf?

$y(x) = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

(x ... waagrechte Entfernung in m,
y ... Höhe in m)

16 m
105 m

2) Ermittle jeweils die maximale Höhe und Weite der Flugbahn.

3) Trifft der Tormann direkt in das gegnerische Tor? Das Spielfeld ist 105 m lang und das Tor hat eine Höhe von 2,44 m. Ermittle (durch Probieren) die Bereiche der Winkel, unter denen der Schuss erfolgen muss, damit der Ball direkt, also ohne zu rollen, im Tor landet. Warum gibt es zwei mögliche Bereiche?

AC **3.45** Welcher Graph veranschaulicht welchen Text? Gibt es mehrere passende Graphen zu einem Text? Welche Größe gibt die Nullstelle jeweils an?

A) Ein Stein wird vom Boden aus senkrecht nach oben geworfen.
B) Eine Kugel rollt von einem waagrechten Tisch.
C) Eine Kugel wird senkrecht fallen gelassen.
D) Ein Ball wird vom Boden unter einem Winkel α weggeschossen.

1) Höhe, Entfernung **2)** Höhe, Zeit **3)** Höhe, Entfernung **4)** Höhe, Zeit

C **3.46** Die dargestellte Funktion stellt die Höhe h in Abhängigkeit von der Zeit t bei einem senkrechten Wurf dar.
Beantworte folgende Fragen:

1) Welche Höhe hat der Ball zum Zeitpunkt t = 1 s?
2) Welchen Weg hat der Ball nach 3 Sekunden zurückgelegt?
3) Welche maximale Höhe hat der Ball erreicht?
4) Welchen Weg hat der Ball insgesamt zurückgelegt?

m Höhe; 20, 15, 10, 5; 0, 1, 2, 3, 4; t s

ABC **3.47** Die Höhe h einer Silvesterrakete zum Zeitpunkt t wird annähernd durch die Funktion $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ und $v_0 = 80\ \frac{m}{s}$ beschrieben.

TE

1) Gib eine sinnvolle Definitionsmenge an.
2) Berechne, nach wie viel Sekunden die Rakete auf dem Boden auftrifft. Welche Stelle wird dabei berechnet?
3) Formuliere eine Frage für die Gleichung h(t) = 20 m.
4) Wie lang steigt die Rakete? Welchen Punkt erreicht sie dann?
5) Wie müsste v_0 geändert werden, damit die Rakete 1 Sekunde früher auf dem Boden auftrifft? Wie ändert sich die Form der Parabel dadurch?

AB **3.48** Ute fährt täglich mit ihrem Motorrad ins Fitness-Studio. Der Treibstoffverbrauch K Liter pro 100 km ist abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit v $\frac{km}{h}$ und lässt sich für ihr Motorrad im Bereich von 40 $\frac{km}{h}$ bis 100 $\frac{km}{h}$ nach der Formel $K(v) = 0{,}0003v^2 + 0{,}008v + 3{,}5$ errechnen. Eine Wegstrecke beträgt 8,4 km. Der Tank des Motorrads fasst 7 Liter. Wie lang kommt sie mit einer Tankfüllung aus, wenn sie mit einer mittleren Geschwindigkeit von 45 $\frac{km}{h}$ fährt und das Motorrad nur für den Hin- und Rückweg benützt?

ABD **3.49** Der Kraftstoffverbrauch eines PKWs hängt bei sonst gleichbleibenden Bedingungen von der Geschwindigkeit ab. Für Geschwindigkeiten über 40 $\frac{km}{h}$ wurde durch Messungen ermittelt, dass bei einer Geschwindigkeit von v $\frac{km}{h}$ der Kraftstoffverbrauch K Liter pro 100 km beträgt, mit $K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 7{,}55$.

TE

1) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Verbrauch genau 8 Liter pro 100 km?
2) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Kraftstoffverbrauch am geringsten?
3) Erkläre, warum die Funktion nur für Geschwindigkeiten über 40 $\frac{km}{h}$ sinnvoll ist.

3.50 Die Form des Wasserstrahls einer automatischen Bewässerungsanlage für Pflanzen wird durch $y(x) = h_0 + x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$, $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ beschrieben. Der Wasserstrahl tritt in einer Höhe von 1,4 m unter einem Winkel von 61° nach oben mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 8{,}3\ \frac{m}{s}$ aus (x ... waagrechte Entfernung in m, y ... Wasserstrahlhöhe in m).

ABC

TE

1) Nach welcher Entfernung trifft der Wasserbogen wieder auf dem Erdboden auf?
2) In welchen waagrechten Entfernungen hat der Wasserbogen eine Höhe von 2 m?
3) Der 180 cm große Gärtner steht 5,7 m von der Düse entfernt. Um wie viele cm verläuft der Wasserstrahl über ihm oder wird er vom Wasserstrahl getroffen?
4) Gib eine Entfernung an, in der der Gärtner sicher vom Wasserstrahl getroffen wird.

3.51 Die Wurfhöhe y eines Balls hängt von der waagrechten Entfernung x von der Abwurfstelle ab und lässt sich durch die Funktion $y(x) = k \cdot x^2 + 4 \cdot x$ beschreiben.

AB

TE

1) Bestimme den Faktor k, wenn der Ball nach 20 m auf dem Boden aufschlägt.
2) In welcher Höhe befindet sich der Ball bei einer Entfernung von 5 m?
3) In welcher Entfernung erreicht der Ball seine maximale Höhe und wie hoch ist diese?
4) Wie viel Meter ist der Ball bei einer Höhe von 8 m von der Abwurfstelle entfernt?

3.52 Ein Betrieb stellt Tische her. Dabei betragen die Fixkosten 1 300 GE und die Herstellungskosten pro Tisch 110 GE. Die Erlösfunktion E ist durch $E(x) = -5x^2 + 500x$ gegeben (x ... Anzahl der Tische).

ABC

TE

1) Gib die Kostenfunktion K, die Preisfunktion p und die Gewinnfunktion G an.
2) Stelle Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion grafisch dar.
3) Ermittle die Gewinnschwelle, die Gewinngrenze und den maximalen Gewinn.

3.53 Die Oberfläche eines Zylinders ist durch die Formel $O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$ gegeben.

ABCD

TE

1) Erkläre, warum bei konstanter Höhe die Oberfläche in Abhängigkeit von r eine quadratische Funktion ist.
2) Stelle die Funktion O(r) für h = 10 cm grafisch dar. Welcher Bereich der Parabel beschreibt diesen Sachverhalt?

3.54 Von einem Turm wird aus zwei verschiedenen Höhen jeweils ein Stein senkrecht nach unten geworfen bzw. fallen gelassen. Der erste Stein wird aus 200 m Höhe hinunter geworfen und hat eine Anfangsgeschwindigkeit von $15\ \frac{m}{s}$, der zweite Stein wird aus 150 m Höhe fallen gelassen.

ABCD

TE

1) Welche der gegebenen Funktionsgleichungen passt zu welcher Bewegung? Begründe deine Entscheidung.

A) $h(t) = h_0 - v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ B) $h(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$

2) Stelle beide Funktionen grafisch dar ($g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$).
3) Erkläre die Bedeutung der Parameter anhand der Funktionsgraphen.
4) Wie viel Meter unter der Abwurfstelle befinden sich die Steine zwei Sekunden nach dem Abwurf jeweils?
5) Nach welcher Zeit erreichen die Steine jeweils eine Höhe von 100 m?
6) Welcher Stein prallt zuerst am Boden auf? Begründe deine Antwort.

3.2 Quadratische Gleichungen

3.2.1 Einleitung

BCD **3.55** Zeichne die Graphen der gegebenen Funktionen und gib jeweils die Anzahl der Nullstellen an. Was fällt dir auf? Gib die Gleichungen an, die gelöst werden müssen, wenn die Nullstellen berechnet werden sollen.

1) $y = x^2 - 9$ ***2)*** $y = (x - 3)^2$ ***3)*** $y = x^2 + 2$

Oft sind die Nullstellen einer quadratischen Funktion, wie zB $y = 2x^2 + 5x - 3$, gesucht. Bisher konnten wir diese nur grafisch ermitteln. Die Berechnung der Nullstellen führt wegen $y = 0$ auf die Gleichung $0 = 2x^2 + 5x - 3$, die **quadratische Gleichung** genannt wird. Je nach Bauart der quadratischen Gleichung unterscheiden sich die Lösungswege und die Anzahl der Nullstellen.

Eine Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ $(a \neq 0)$ heißt **quadratische Gleichung**.
$a \cdot x^2$ ... quadratisches Glied, $b \cdot x$ ... lineares Glied, c ... konstantes Glied
Die **Lösungen** dieser Gleichung sind die **Nullstellen** der zugehörigen quadratischen Funktion.
Wird die Gleichung durch a dividiert, so erhält man die so genannte **Normalform**:
$x^2 + px + q = 0$ mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

CD **3.56** Gib an, ob es sich um eine lineare Gleichung, eine quadratische Gleichung oder weder noch handelt. Die Variable ist jeweils x. Begründe deine Entscheidung.

1) $a^2x + b = 0$ ***3)*** $3x^2 + 4 = 7x$ ***5)*** $2^x + 3 = 0$ ***7)*** $\frac{1}{x^2} = 4$

2) $h_0 + \frac{x^2 \cdot g}{2 \cdot v^2} = 0$ ***4)*** $\frac{2}{x} = x$ ***6)*** $ax^2 = bx$ ***8)*** $\frac{h}{x} = k$

B **3.57** Gib die quadratische Gleichung in Normalform an.

a) $3x^2 - 6x + 9 = 0$ ***b)*** $2x + x^2 = 4$ ***c)*** $2x^2 + 3x = 6 + 4x$ ***d)*** $3 - 7x = x^2$

3.2.2 Reinquadratische Gleichungen

Reinquadratische Gleichungen sind quadratische Gleichungen, bei denen das lineare Glied nicht vorhanden ist. Sie haben die Bauart $ax^2 + c = 0$, also $b = 0$. ZB: $x^2 - 5 = 0$ oder $5x^2 + 4 = 0$

ZB: Löse die Gleichung $x^2 - 16 = 0$.

$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16 \quad |\sqrt{\ }$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = -4, x_2 = 4$
$L = \{-4; 4\}$

- Gesucht sind zwei Zahlen, deren Quadrat 16 ist. Das gilt für +4 und −4, da $4^2 = 16$ und $(-4)^2 = 16$. Da per Definition $\sqrt{16} = +4$ gilt, sind die beiden Lösungen $+\sqrt{16}$ und $-\sqrt{16}$. Die zur Gleichung gehörige Funktion lautet $y = x^2 - 16$. Die Nullstellen der Funktion sind bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.

ZB: Löse die Gleichung $x^2 + 9 = 0$.

$x^2 + 9 = 0$
$x^2 = -9$
in $\mathbb{R}$: $L = \{\ \}$

- Gesucht sind Zahlen, deren Quadrat −9 ist. Im Reellen gibt es keine solche Zahl, die Gleichung hat keine reelle Lösung. Die zugehörige Funktion $y = x^2 + 9$ hat keine Nullstellen.

In Abschnitt 7 werden wir einen Zahlenbereich kennen lernen, in dem solche Zahlen existieren und diese Gleichung daher lösbar ist.

Aufgaben 3.58 – 3.59: Ermittle jeweils die Lösungsmenge der Gleichung in $\mathbb{R}$.

3.58 **a)** $x^2 = 169$ **b)** $x^2 = 324$ **c)** $x^2 - 25 = 0$ **d)** $x^2 + 81 = 0$ **e)** $x^2 - 144 = 0$ B

3.59 **a)** $12x^2 - 48 = 0$ **b)** $-x^2 + 225 = 0$ **c)** $\frac{1}{7}x^2 + 11 = 0$ **d)** $147x^2 + 27 = 0$ **e)** $-\frac{5}{8}x^2 + 10 = 0$ B

3.2.3 Gemischtquadratische Gleichungen ohne Konstante

3.60 Zeichne folgende Funktionen und gib an, welche davon eine Nullstelle im Punkt N(0|0) haben. Überlege, welche Gemeinsamkeiten die Funktionsgleichungen in diesem Fall aufweisen. BC

1) $y = x^2 - 4$ **2)** $y = x^2 - 2x$ **3)** $y = x^2 + 3x$ **4)** $y = (x - 1)^2 - 4$

Eine Gleichung der Bauart $ax^2 + bx = 0$, also mit $c = 0$, nennt man gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante. Aus der grafischen Darstellung erkennt man, dass eine Lösung immer $x = 0$ ist. Dies kann auch leicht mithilfe der Probe gezeigt werden.

ZB: Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x = 0$ sollen grafisch und rechnerisch ermittelt werden. Stellt man den Graphen der zugehörigen Funktion $y = x^2 - 4x$ dar, so erhält man zwei Nullstellen, also zwei Lösungen:

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4$

Bei folgendem Rechenweg würde eine Lösung „verloren" gehen:

$x^2 - 4x = 0 \quad | + 4x$

$x^2 = 4x \quad | : x$

$x = 4$

Die Division durch x ist nur für $x \neq 0$ möglich. Führt man diesen Rechenschritt aus, so hat man damit $x \neq 0$ festgesetzt und die Lösung $x = 0$ geht verloren. Um die Lösung $x = 0$ nicht zu verlieren, muss die Gleichung durch Herausheben von x gelöst werden.

$x^2 - 4x = 0$

$x \cdot (x - 4) = 0$

$x = 0 \qquad x - 4 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$

$L = \{0; 4\}$

- x herausheben
- Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist. Es gibt also zwei Möglichkeiten: $x = 0$ oder $(x - 4) = 0$
  1. Möglichkeit: $x = 0 \Rightarrow$ 1. Lösung: $x_1 = 0$
  2. Möglichkeit: $x - 4 = 0 \Rightarrow$ 2. Lösung: $x_2 = 4$

Jede gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante kann durch **Faktorisieren** gelöst werden.
Ein **Produkt** ist **genau dann null**, wenn **mindestens ein Faktor null** ist (**Produkt-Null-Satz**).

3.61 Wie müssen die Parameter b und c gewählt werden, damit die Gleichung $(x - b)^2 + c = 0$ C
1) eine reinquadratische Gleichung ist?
2) eine gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante ist?

Aufgaben 3.62 – 3.63: Löse jeweils durch Faktorisieren und gib die Lösungsmenge an.

3.62 **a)** $x^2 + 6x = 0$ **b)** $7x^2 - 14x = 0$ **c)** $-x^2 + \sqrt{2} \cdot x = 0$ **d)** $-2x^2 + \pi \cdot x = 0$ B

3.63 **a)** $6x^2 = 42x$ **b)** $81x = 9x^2$ **c)** $5x^2 = -15 \cdot \sqrt{5} \cdot x$ **d)** $0{,}2 \cdot \sqrt{7} \cdot x = 0{,}4 \cdot \sqrt{7} \cdot x^2$ B

3.2.4 Allgemeine quadratische Gleichungen

Allgemeine quadratische Gleichungen sind Gleichungen der Bauart $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \neq 0$.

BD **3.64** Löse folgende Gleichungen.

1) $(x - 1)^2 = 9$

Ziehe die Wurzel, ohne vorher auszuquadrieren. Achte auf die Vorzeichen.

2) $x^2 - 2x + 1 = 9$

Warum ist es schwieriger, wenn die Gleichung aus ***1)*** vorher ausquadriert wird? Welcher zusätzliche Rechenschritt ist nun erforderlich?

B **3.65** Ergänze die fehlenden Zahlen.

a) $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + \ldots$ ***b)*** $x^2 + 4x + 9 = (x + \ldots)^2 + \ldots$

Bevor wir eine Gleichung der Bauart $ax^2 + bx + c = 0$ lösen, beschäftigen wir uns mit dem Lösen der Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$. Wie bei der rechnerischen Ermittlung des Scheitels einer quadratischen Funktion verwendet man die **quadratische Ergänzung**.

Um einen Ausdruck der Form $x^2 + px$ ($p \in \mathbb{R}$) auf ein vollständiges Quadrat zu ergänzen, muss der **Faktor p halbiert** und **anschließend quadriert** werden:

$$x^2 + px + \ldots = (x + \ldots)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Nun wird anhand eines konkreten Beispiels die Vorgehensweise gezeigt und eine allgemeine Formel hergeleitet.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 7 &= 0 \\ x^2 + 8x &= -7 \\ x^2 + 8x + 16 &= 16 - 7 \\ x^2 + 8x + 16 &= 9 \\ (x + 4)^2 &= 9 \\ x + 4 &= \pm 3 \end{aligned}$$

$x_1 = -4 + 3 = -1$
$x_2 = -4 - 3 = -7$
$L = \{-7; -1\}$

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px &= -q \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die so erhaltene Formel wird als „**kleine Lösungsformel**" bezeichnet. Mithilfe der kleinen Lösungsformel kann auch eine Formel für Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ hergeleitet werden (siehe Aufgabe 3.94). Diese Formel wird „**große Lösungsformel**" genannt.

Eine quadratische Gleichung in der **Normalform $x^2 + px + q = 0$** lässt sich mit der so genannten **kleinen Lösungsformel** lösen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{bzw.} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Eine quadratische Gleichung in der **allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$** lässt sich mit der so genannten **großen Lösungsformel** lösen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

B

3.66 Löse folgende Gleichung. ***a)*** $x^2 + 7x - 8 = 0$ ***b)*** $4x^2 - 8x - 5 = 0$

Lösung:

a) $x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow p = 7, q = -8$

$$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-8)} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 8} =$$

$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{32}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}$$

$x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 1,\ x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} = -8 \qquad L = \{-8; 1\}$

- $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

b) $4x^2 - 8x - 5 = 0 \Rightarrow a = 4, b = -8, c = -5$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{8 \pm 12}{8}$$

$x_1 = \frac{8 + 12}{8} = \frac{5}{2},\ x_2 = \frac{8 - 12}{8} = -\frac{1}{2} \qquad L = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Anzahl der Lösungen

Anhand der Graphen kann man erkennen, dass quadratische Funktionen zwei, eine oder keine Nullstellen haben können. Beim Anwenden der Lösungsformel für quadratische Gleichungen muss eine Wurzel berechnet werden. Der **Wert des Ausdrucks unter der Wurzel** wird als **Diskriminante** D (latein: „discriminare" = unterscheiden) bezeichnet. Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen.

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 8} =$

$= -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$

$x_1 = 2, x_2 = -4 \qquad L = \{-4; 2\}$

Die Diskriminante ist **größer als null**. Die Gleichung hat **zwei reelle Lösungen**.

Die zugehörige quadratische Funktion hat **zwei Nullstellen**.

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1 \pm \sqrt{0} = 1$

$L = \{1\}$

Die Diskriminante ist **gleich null**. Die Gleichung hat **eine reelle Lösung**.

Die zugehörige quadratische Funktion berührt die x-Achse. Sie hat **eine** (doppelte) **Nullstelle**.

$x^2 - 2x + 7 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 7} =$

$= 1 \pm \sqrt{-6}$

$L = \{\ \}$

Die Diskriminante ist **kleiner als null**. Die Gleichung hat **keine relle Lösung**.

Die zugehörige quadratische Funktion hat **keine Nullstelle**.

Anhand der **Diskriminanten** $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $D = b^2 - 4ac$ lässt sich eine Aussage über die Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung treffen:

- **$D > 0$**: Die Gleichung hat **zwei** verschiedene reelle Lösungen.
- **$D = 0$**: Die Gleichung hat **eine** reelle Lösung, auch „Doppellösung" genannt.
- **$D < 0$**: Die Gleichung hat **keine** reelle Lösung.

Satz von Vieta

BD **3.67** ***1)*** Ermittle die Lösungen der Gleichung $(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$ ohne auszumultiplizieren.
2) Welche Zahlen muss man in $(x - ...) \cdot (x - ...) = 0$ einsetzen, damit die Gleichung die Lösungen $x_1 = -5$ und $x_2 = 7$ hat?
3) Gib den Ausdruck $(x + 8) \cdot (x - 2)$ in der Form $x^2 + px + q$ an.
Welche Zusammenhänge fallen dir zwischen den gegebenen Zahlenwerten und den Koeffizienten p bzw. q auf?

Der **Satz von Vieta**, benannt nach François Viète (französischer Mathematiker, 1540 – 1603), gibt einen Zusammenhang zwischen den Lösungen x_1 und x_2 und den Koeffizienten p und q der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ an. Werden in der Gleichung $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 die Klammern ausmultipliziert, so kann man diesen Zusammenhang erkennen.

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$
$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$
$$x^2 + \underbrace{(-x_1 - x_2)}_{p} \cdot x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{q} = 0$$
$$\Rightarrow \ (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + p \cdot x + q$$

- $p = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2)$ bzw. $x_1 + x_2 = -p$
- $x_1 \cdot x_2 = q$

Die Terme $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ nennt man **Linearfaktoren** von $x^2 + px + q$.
Aus einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ kann der Faktor a herausgehoben werden. Mithilfe der Lösungen x_1 und x_2 kann sie dann in der Form $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ angegeben werden.

Der **Satz von Vieta** gibt den Zusammenhang zwischen den Lösungen x_1 und x_2 und den Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ an:
$\mathbf{x_1 + x_2 = -p}$ und $\mathbf{x_1 \cdot x_2 = q}$
Der quadratische Ausdruck $x^2 + px + q$ lässt sich mithilfe der Lösungen x_1 und x_2 der zugehörigen quadratischen Gleichung in **Linearfaktoren** zerlegen:
$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

B **3.68** Löse die Gleichung $x^2 - x - 20 = 0$ und überprüfe die Richtigkeit der Lösungen mithilfe des Satzes von Vieta.

Lösung:
$x^2 - x - 20 = 0$
$x_{1,2} = -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-20)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + 80}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$
$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5, \ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4 \qquad L = \{-4; 5\}$
$q = x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-4) = -20, \quad -p = x_1 + x_2 = 5 + (-4) = 1 \ \Rightarrow \ p = -1$

BD **3.69** Von einer quadratischen Gleichung kennt man die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$. Wähle die passende Gleichung aus und begründe deine Wahl.
A) $x^2 + 8x - 15 = 0$ B) $x^2 - 2x - 15 = 0$ C) $x^2 - 2x + 15 = 0$

Lösung:
Die zugehörige Gleichung ist B), da nach dem Satz von Vieta gelten muss:
$x_1 + x_2 = 5 + (-3) = 2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-3) = -15 = q$
Kontrolle: $(x - 5) \cdot (x + 3) = x^2 - 2x - 15$

3.70 Löse die Gleichung in $\mathbb{R}$ mit der kleinen und mit der großen Lösungsformel. Welche Formel ist deiner Meinung nach besser geeignet? BD

a) $n^2 + 11n + 24 = 0$ **c)** $h^2 - 10h + 25 = 0$ **e)** $a^2 - a - 2 = 0$ **g)** $s^2 - s - 132 = 0$
b) $3f^2 - 8f - 3 = 0$ **d)** $5v^2 + 29v + 20 = 0$ **f)** $9k^2 - 12k + 4 = 0$ **h)** $7u^2 - 4u - 3 = 0$

3.71 Gib mithilfe der Diskriminante zuerst die Anzahl der Lösungen an und berechne anschließend gegebenenfalls die Lösungen. BC

a) $x^2 - 3x - 2 = 0$ **b)** $x^2 + 3x + 21 = 0$ **c)** $3x^2 - 24x + 48 = 0$ **d)** $8x^2 + 5x - 4 = 0$

Aufgaben 3.72 – 3.75: Löse die Gleichungen in $\mathbb{R}$.

3.72 **a)** $x^2 - 6x = 12$ **c)** $4y^2 = 16y - 5$ **e)** $20z + 4 = -2z^2$ **g)** $h^2 - 2h = -9$ B
b) $g^2 = 4g - 3$ **d)** $r^2 - 8r = -23$ **f)** $7c^2 - 50c = -14$ **h)** $48s = 4s^2 - 8$

3.73 **a)** $(x - 1)^2 = 3x^2 - 3$ **b)** $(x - 1)^3 = x^3 - 4x^2 - 3$ **c)** $4x^2 + 5x - 4 = x \cdot (7x - 3)$ B

3.74 **a)** $(x - 4) \cdot x = -(7 + x)^2$ **b)** $(2x - 1)^2 = (2x - 1) \cdot (x + 3)$ **c)** $(3x + 1)^2 - (x + 1)^2 = 0$ B

3.75 **a)** $(x + 1)^2 - (2x + 2) = 0$ **b)** $(4x^2 - 9) = 2 \cdot (2x - 3) - x \cdot (2x - 3)$ **c)** $(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = x^2$ B

3.76 Wie viele reelle Lösungen haben Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ mit $a, b \neq 0$ immer? Begründe deine Antwort. CD

3.77 **1)** Löse die Gleichungen $x^2 + 4x + 4 = 0$ und $x^2 - 6x + 9 = 0$. ABCD
2) Was fällt dir an den Lösungen aus **1)** auf?
3) Ermittle c so, dass die Gleichung $x^2 + 10x + c = 0$ eine Doppellösung hat.
4) Gib allgemein an, welche Bauart eine quadratische Gleichung haben muss, damit sie eine Doppellösung hat. Was kann man über die Linearfaktoren in diesem Fall aussagen?
5) Recherchiere den Begriff „Vielfachheit".

3.78 Begründe, ohne die Lösungen zu berechnen, warum die gegebenen Zahlen nicht Lösungen der quadratischen Gleichung sein können. D

a) $x^2 + x - 6 = 0$ $x_1 = 2, x_2 = 3$ **b)** $x^2 - 39x + 75 = 0$ $x_1 = 2, x_2 = 37$

3.79 Ermittle die Lösungen der Gleichung und überprüfe die Richtigkeit der Lösungen mithilfe des Satzes von Vieta. Gib die Gleichung anschließend als Produkt von Linearfaktoren an. B

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$ **b)** $x^2 + 3x - 108 = 0$ **c)** $x^2 - 5x - 36 = 0$ **d)** $x^2 + 9x - 10 = 0$

Aufgaben 3.80 – 3.81: Bestimme jeweils den fehlenden Koeffizienten sowie die zweite Lösung und gib die Gleichung mithilfe von Linearfaktoren an.

3.80 $2x^2 + 3x + c = 0, \; x_1 = 2$ B

Lösung:

$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + c = 0$
$c = -14$

- Die Lösung $x_1 = 2$ erfüllt die Gleichung.

$2x^2 + 3x - 14 = 2 \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7\right) = 0$
$x_1 \cdot x_2 = -7 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{-7}{2}$
$2x^2 + 3x - 14 = 2 \cdot (x - 2) \cdot \left(x + \frac{7}{2}\right)$

- x_2 kann mithilfe des Satzes von Vieta bestimmt werden, wenn 2 herausgehoben wird, oder auch durch Lösen der Gleichung.

3.81 **a)** $x^2 + 8x - q = 0$ $x_1 = 3$ **c)** $x^2 + px + 9 = 0$ $x_1 = -1$ **e)** $4x^2 - bx - 1 = 0$ $x_1 = 12$ B
b) $x^2 - px - 5 = 0$ $x_1 = -2$ **d)** $3x^2 + 7x - c = 0$ $x_1 = 7$ **f)** $ax^2 - 4x - 1 = 0$ $x_1 = -5$

B **3.82** Gib die quadratische Gleichung mit den gegebenen Lösungen und möglichst kleinen ganzzahligen Koeffizienten an.

a) $x_1 = 5, x_2 = 3$ **c)** $m_1 = 4, m_2 = -6$ **e)** $v_1 = -\frac{3}{2}, v_2 = 2$ **g)** $u_1 = \frac{1}{10}, u_2 = \frac{2}{10}$

b) $a_1 = -1, a_2 = 2$ **d)** $r_1 = 11, r_2 = 10$ **f)** $s_1 = -\frac{5}{4}, s_2 = -\frac{1}{2}$ **h)** $c_1 = 15, c_2 = -\frac{3}{5}$

BC **3.83** Beschreibe zuerst, wie man die Gleichung $2x^2 - 2x - 3 = -4x + 1$ grafisch lösen kann. Führe diesen Lösungsweg mit Technologieeinsatz durch und löse auch rechnerisch.

Lösung:
Das Lösen der Gleichung kann als Schnitt der Parabel $y_P = 2x^2 - 2x - 3$ mit der Geraden $y_G = -4x + 1$ aufgefasst werden. Die Lösungen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

Algebra
Funktion
f(x) = 2x² - 2x - 3
g(x) = -4x + 1
Punkt
A = (-2, 9)
B = (1, -3)
Grafik

$$2x^2 - 2x - 3 = -4x + 1$$
$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} =$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1, x_2 = -2$$

BC **3.84** Beschreibe, wie man die gegebene Gleichung grafisch lösen kann. Löse auch rechnerisch.

a) $x^2 - 2x = x + 4$ **b)** $x^2 + 3x + 4 = -x - 5$ **c)** $-x^2 + 4 = 2 \cdot (x + 2)^2$

B **3.85** Bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden.

a) $y_P = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, y_G = 2x - 1$ **b)** $y_P = 2x^2 - 3x + 4, y_G = 6$

BD **3.86** Mithilfe eines CAS wurde der Bruch $\frac{2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$ gekürzt. Erkläre, wie der Bruch gekürzt wurde und warum die abgebildete Meldung erscheint.

1.1 *Nicht gespeicherte
$\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$ $\frac{x-4}{x-5}$
Achtung
Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein als der der Eingabe.
OK
Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer ...

Lösung:
Die Terme wurden in Linearfaktoren zerlegt.
$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-4)\cdot\cancel{(x-3)}}{(x-5)\cdot\cancel{(x-3)}} = \frac{(x-4)}{(x-5)}$$
Der Definitionsbereich des Ausgangsbruchs ist $D = \mathbb{R}\setminus\{3; 5\}$, jener des gekürzten Bruchs hingegen $D = \mathbb{R}\setminus\{5\}$.

B **3.87** Kürze den Bruch und gib die Definitionsmenge vor und nach dem Kürzen an.

a) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 7x + 6}$ **c)** $\frac{x^2 - 14x + 45}{x^2 - x - 20}$ **e)** $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}$ **g)** $\frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 - 9}$

b) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25}$ **d)** $\frac{x^2 + x - 110}{x^2 - 100}$ **f)** $\frac{x^2 + 29x + 210}{x^2 - 225}$ **h)** $\frac{x^2 - 81}{x^2 + 4x - 117}$

B **3.88** Löse die Gleichung $\frac{4 - x^2}{x - 2} + 5 + x = \frac{x \cdot (x + 3) - 10}{x - 2}$.

Lösung:
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
$$\frac{4 - x^2}{x - 2} + 5 + x = \frac{x \cdot (x + 3) - 10}{x - 2} \quad | \cdot (x - 2)$$
$$4 - x^2 + (5 + x) \cdot (x - 2) = x \cdot (x + 3) - 10$$
$$4 - x^2 + 5x - 10 + x^2 - 2x = x^2 + 3x - 10$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$
● 2 ist nicht in der Definitionsmenge enthalten und daher keine Lösung.

$L = \{-2\}$

Aufgaben 3.89 – 3.91: Ermittle jeweils die Lösungsmenge der Gleichung.

3.89 **a)** $x + \frac{1}{2x} - \frac{33}{8} = 0$ **b)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{x-2}$ **c)** $\frac{5}{x+1} + x = 5$ **d)** $\frac{x+3}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$ — B

3.90 **a)** $\frac{45}{14} = \frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5}$ **c)** $\frac{3+x}{x-7} - \frac{40}{(x-7)\cdot(x+3)} = \frac{1-x}{x+3}$ — B

b) $\frac{x+10}{x-10} + \frac{x-10}{x+10} = \frac{208}{x^2-100}$ **d)** $\frac{1}{x-2} = \frac{x}{2x-4} - \frac{4}{2+x}$

3.91 **a)** $\frac{4}{x^2-25} - \frac{x+5}{x-5} = \frac{x-5}{x+5} - 3$ **b)** $\frac{x+2}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{(2x+2)^2}{x^2-x}$ **c)** $\frac{2x}{x^2-4x} + \frac{5x+10}{x^2-16} = \frac{18}{x}$ **d)** $\frac{2}{x-1} = \left(\frac{2}{x-1}\right)^2 - 2$ — B

3.92 Forme die Formeln nach der gesuchten Größe um. Gib an, unter welchen Bedingungen die Lösungen reell sind. — BC

a) $h = h_0 - \frac{g}{2}\cdot t^2$ $t = ?$ **c)** $M = \frac{q\cdot \ell \cdot x - q\cdot x^2}{2}$ $x = ?$ **e)** $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$ $R_1 = R_2, R_1 = ?$

b) $O = 2a^2 + 4\cdot a\cdot h$ $a = ?$ **d)** $R^2 = (R-h)^2 + r^2$ $h = ?$ **f)** $s = v_0\cdot t + \frac{a}{2}\cdot t^2$ $t = ?$

3.93 Beweise den Satz von Vieta. Verwende die Lösungen aus der kleinen Lösungsformel. — BD

3.94 Leite mithilfe der kleinen Lösungsformel die große Lösungsformel her, indem du die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zuerst durch a dividierst. — BD

3.95 Welche Lösungen hat die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, wenn $a + b + c = 0$ ist? — AB

3.96 Ermittle ohne Lösungsformel die (ganzzahligen) Lösungen, indem du dir die Zerlegung in Linearfaktoren überlegst. Halte diese Überlegungen schriftlich fest. — BC

a) $x^2 + x - 12 = 0$ **b)** $3x^2 - 18x + 24 = 0$

Lösung:

a) $x^2 + x - 12 = 0$
$(x+4)\cdot(x-3) = 0$
$x_1 = -4, x_2 = 3$

Der Linksterm muss so in ein Produkt $(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ zerlegt werden, dass gilt: $x_1 \cdot x_2 = -12$ und $x_1 + x_2 = -1$
Möglich: $-1\cdot 12$ oder $1\cdot(-12)$ oder $-3\cdot 4$ oder $3\cdot(-4)$
Die Summe $x_1 + x_2$ muss (-1) ergeben: $-4 + 3 = -1$

b) $3x^2 - 18x + 24 = 0$
$3\cdot(x^2 - 6x + 8) = 0$
$3\cdot(x-2)\cdot(x-4) = 0$
$x_1 = 2, x_2 = 4$

Zuerst wird 3 herausgehoben, anschließend sucht man Zahlen für die gilt: $x_1\cdot x_2 = 8$ und $x_1 + x_2 = 6$
Möglich: $8 = 1\cdot 8 = -1\cdot(-8) = 2\cdot 4 = -2\cdot(-4)$
Für die Summe erhält man: $2 + 4 = 6$

3.97 Ermittle die Lösungen ohne Lösungsformel, halte deine Überlegungen schriftlich fest. — BC

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$ **c)** $x^2 - 15x + 36 = 0$ **e)** $x^2 + 6x - 27 = 0$ **g)** $5x^2 - 5x - 10 = 0$

b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ **d)** $x^2 + 12x - 45 = 0$ **f)** $3x^2 + 9x - 12 = 0$ **h)** $2x^2 + 14x + 24 = 0$

Aufgaben 3.98 – 3.100: Was muss für die fehlenden Koeffizienten gelten, damit die gegebene Bedingung erfüllt ist?

3.98 $x^2 + px + 9 = 0$ Die Gleichung soll keine reelle Lösung haben. — BC

3.99 $x^2 - 6x - q = 0$ Die Gleichung soll nur eine reelle Lösung haben. — BC

3.100 $3x^2 - 2x + c = 0$ Die Gleichung soll zwei reelle Lösungen haben. — BC

3.101 **1)** Unter welchen Voraussetzungen hat die Funktion $y = ax^2 + c$ reelle Nullstellen? Wo liegen diese? Skizziere die möglichen Fälle. — BCD

2) Zerlege $ax^2 + c$ in Linearfaktoren. Welche bekannte Formel ergibt sich für $a > 0$ und $c < 0$?

3.2.5 Textaufgaben

Tipps zur Bearbeitung von Textaufgaben:
- Kennzeichne jene Teile des Texts, die für das Lösen von Bedeutung sind.
- Lege eine Gleichungsvariable fest; meist ist die gesuchte Größe geeignet.
- „Übersetze" den Text so in mathematische Schreibweise, dass du eine Gleichung erhältst.
- Überlege, welche Werte sinnvolle Lösungen für die Aufgabe darstellen und beachte, dass die Gleichung nur in diesem Bereich ein Modell der Situation darstellt.
- Löse die Gleichung (eventuell mit Technologieeinsatz) und mache die Probe anhand des Texts.

Aufgaben mit Zahlen und Ziffern

AB **3.102** Das Produkt zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen ist um 100 größer als die kleinere Zahl. Berechne die gesuchten Zahlen.

Lösung:
x ... kleinere gesuchte Zahl
$x + 1$ ... darauf folgende ganze Zahl
Definitionsmenge: $D = \mathbb{Z}$

$$x \cdot (x + 1) = x + 100$$
$$x^2 + x = x + 100$$
$$x^2 = 100$$

$x_1 = 10, x_2 = -10$

Probe anhand des Texts:
Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen:
$x_1 = 10$: $10 \cdot 11 = 110$, 110 ist um 100 größer als die kleinere Zahl 10.
$x_2 = -10$: $-10 \cdot (-9) = 90$, 90 ist um 100 größer als die kleinere Zahl -10.
Die Zahlen lauten 10 und 11 oder -10 und -9.

Aufgaben 3.103 – 3.106: Berechne die gesuchten Zahlen.

AB **3.103** Multipliziert man die Hälfte einer ganzen Zahl mit dem Drittel derselben Zahl, so erhält man die Zahl 6.

AB **3.104** Multipliziert man eine ganze Zahl mit sich selbst und addiert zum Produkt 15, so erhält man 64.

AB **3.105** Das Produkt zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen ist um 9 größer als die kleinere Zahl.

AB **3.106** Vermehrt man das Quadrat einer ganzen Zahl um 18, so erhält man 307.

ABC **3.107** Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine um 2 größer ist als die andere, hat den Wert 724. Berechne die Zahlen für ***1)*** $D = \mathbb{N}$, ***2)*** $D = \mathbb{Z}$.

ABCD **3.108** Von zwei Zahlen ist eine um zwei größer als die andere. Das Produkt der beiden ist drei.
1) Berechne die gesuchten Zahlen.
2) Auf welchen Wert muss man das Produkt ändern, damit es genau eine Lösung gibt?
3) Erkläre, was passiert, wenn das Produkt auf den Wert (-2) geändert wird.

ABC **3.109** Die Zahl 42 soll in zwei Summanden x_1 und x_2 zerlegt werden, deren Produkt 432 beträgt.
1) Was fällt dir an den Koeffizienten der entstandenen quadratischen Gleichung auf?
2) Berechne die gesuchten Zahlen.

Geometrische Aufgaben

3.110 Ein Holzschacht mit den inneren Abmessungen 60 cm x 100 cm soll eine auf allen Seiten gleich breite Ummantelung erhalten. Aus statischen Gründen muss der Flächeninhalt der Querschnittsfläche der Ummantelung mindestens 1 m^2 betragen.

ABD

1) Stelle den Sachverhalt durch eine Skizze dar und gib eine Gleichung an, die den Flächeninhalt der Querschnittsfläche angibt.

2) Berechne die Breite der Ummantelung.

3) Beschreibe den folgenden Ansatz. Welcher Fehler wurde gemacht?

$2 \cdot x \cdot (100\text{ cm} + 2x) + 2 \cdot x \cdot (60\text{ cm} + 2x) = 10\,000\text{ cm}^2$

Lösung:

1) Skizze:

x 100 x 60 x x

$A_{Mantel} = A_{Gesamt} - A_{Ausschnitt}$

2) x ... Breite des Mantels in cm

D: $x \geqslant 0$ cm

$10\,000\text{ cm}^2 = (100\text{ cm} + 2x) \cdot (60\text{ cm} + 2x) - 60\text{ cm} \cdot 100\text{ cm}$

Nebenrechnung: $10\,000 = 6\,000 + 320x + 4x^2 - 6\,000$

$x_1 = 24{,}031...,\ x_2 = -104{,}031$

$x \approx 25$ cm

Probe: $150\text{ cm} \cdot 110\text{ cm} - 6\,000\text{ cm}^2 = 10\,500\text{ cm}^2$

Die Breite sollte 25 cm betragen.

- Gesamtlänge: 100 cm + 2x
  Gesamtbreite: 60 cm + 2x
  Ausschnitt: 60 cm · 100 cm
- Der negative Wert kommt als Lösung nicht in Frage.

3) Der Mantel wurde in Rechtecke aufgeteilt. Die überschneidenden Bereiche in den Ecken wurden doppelt gerechnet.

3.111 Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 7,5 cm lang. Die Summe der beiden Kathetenlängen beträgt 10,5 cm. Berechne die Längen der Katheten.

AB

3.112 In einem Trapez mit 45 cm^2 Flächeninhalt ist die kürzere Parallelseite um 2 cm kürzer als die längere und um 3 cm länger als die Höhe.

ABCD

1) Welche Gleichungen beschreiben den Sachverhalt? Welche Größe gibt dabei die Variable x an?

A) $\frac{(2x + 2)(x - 3)}{2} = 45$ B) $\frac{(2x - 2)(x + 3)}{2} = 45$ C) $\frac{(2x - 2)(x - 5)}{2} = 45$

2) Berechne die Längen der Parallelseiten und der Höhe.

3) Ist das Trapez dadurch eindeutig bestimmt? Begründe deine Antwort.

3.113 Von den Kanten eines Quaders ist die mittlere um 2 cm länger als die kürzeste und um 3 cm kürzer als die längste. Berechne die Kantenlängen, wenn die Oberfläche 310 cm^2 beträgt.

AB

3.114 Die Massen zweier Würfel aus dem selben Material ($\rho = 0{,}6\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) unterscheiden sich um 232,2 g. Die Kante des schwereren Würfels ist um 3 cm länger als die des leichteren. Berechne die Kantenlängen der Würfel. Aus welchem Material könnten die Würfel sein?

ABC

3.115 Um ein rechteckiges Schwimmbecken von 40 m Länge und 30 m Breite soll eine an allen Seiten gleich breite Rasenfläche angelegt werden, deren Flächeninhalt 5-mal so groß wie der des Schwimmbeckens sein soll. Berechne die äußeren Abmessungen der Rasenfläche.

AB

Aufgaben 3.116 – 3.117: Stelle vor der Berechnung den Sachverhalt jeweils durch eine Skizze dar.

AB **3.116** Die Länge eines an einer Straßenkreuzung liegenden Grundstücks ist um 22,00 m größer als die Breite. Infolge einer Verbreiterung der Straßen wird es in der Länge um 3,50 m und in der Breite um 2,50 m verkürzt. Der Flächeninhalt des Grundstücks beträgt nun nur noch 2 805,75 m^2. Berechne, wie viel Prozent der ursprünglichen Fläche verloren gehen.

AB **3.117** Inmitten einer runden Liegewiese befindet sich ein kreisförmiges Schwimmbecken, welches 51 % der Gesamtfläche einnimmt. Die verbleibende Wiese hat die Form eines Kreisrings mit 8 m Breite. Berechne den Durchmesser des Schwimmbeckens.

Bewegungsaufgaben

AB **3.118** Ein LKW, der die 63 km lange Strecke von Wien nach Bratislava gefahren war, musste aufgrund eines Schlechtwettereinbruchs die Geschwindigkeit für die Rückfahrt reduzieren. Die mittlere Geschwindigkeit war dadurch um 21 $\frac{km}{h}$ niedriger und der LKW benötigte eine halbe Stunde länger als bei der Hinfahrt. Berechne die mittlere Geschwindigkeit auf der Hinfahrt.

Lösung:
63 km ... Weg , v ... mittlere Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ auf der Hinfahrt

Definitionsmenge: $D = \{v \in \mathbb{R} | v > 21\,\frac{km}{h}\}$

$t_{Hinfahrt} = \frac{63\,km}{v}$, $t_{Rückfahrt} = \frac{63\,km}{v - 21\,\frac{km}{h}}$ • $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v}$

$t_{Rückfahrt} = t_{Hinfahrt} + \frac{1}{2}\,h$

$\frac{63\,km}{v - 21\,\frac{km}{h}} = \frac{63\,km}{v} + \frac{1}{2}\,h \qquad | \cdot 2v \cdot (v - 21\,\frac{km}{h})$

$63 \cdot 2v = 63 \cdot 2 \cdot (v - 21) + v \cdot (v - 21) \cdot 1$

$126v = 126v - 2\,646 + v^2 - 21v$

$0 = v^2 - 21v - 2\,646$

• Die weitere Berechnung erfolgt ohne Einheiten.

$v_1 = 63\,\frac{km}{h}$, $v_2 = -42\,\frac{km}{h}$

• Die negative Lösung kommt für die Geschwindigkeit nicht in Frage.

Probe: Zeit auf der Hinfahrt: $\frac{63\,km}{63\,\frac{km}{h}} = 1\,h$, Zeit auf der Rückfahrt: $\frac{63\,km}{63\,\frac{km}{h} - 21\,\frac{km}{h}} = 1{,}5\,h$

Die mittlere Geschwindigkeit auf der Hinfahrt betrug 63 $\frac{km}{h}$.

AB **3.119** Eine 160 km lange Bahnstrecke wurde modernisiert, wodurch die Züge ihre mittlere Geschwindigkeit um 20 $\frac{km}{h}$ erhöhen können. Die Fahrzeit verringert sich dadurch um 24 Minuten. Berechne die neue Fahrzeit.

AB **3.120** Ein PKW fährt von St. Pölten ins 120 km entfernte Linz. Nachdem er 80 km zurückgelegt hat, begegnet ihm ein LKW, der 20 Minuten später von Linz nach St. Pölten abgefahren ist und in der Stunde 20 km weniger zurücklegt als der PKW. Berechne die mittleren Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge.

AB **3.121** Julia läuft eine Strecke von 15 km. Fährt sie die gleiche Strecke mit Inline-Skates, gewinnt sie 40 Minuten, da sie mit Inline-Skates im Durchschnitt um 6 $\frac{km}{h}$ schneller unterwegs ist als beim Laufen. Berechne die mittleren Geschwindigkeiten, mit denen Julia jeweils unterwegs ist, und wie lang sie jeweils braucht.

Leistungsaufgaben

3.122 Zum Reinigen der Stiegen einer Wohnsiedlung braucht der Hausbesorger Herr Schmid um 3 Stunden länger als seine Frau. Waschen beide gemeinsam die Stiegen auf, so sind sie in 2 Stunden fertig. Berechne, wie lang jeder der beiden allein braucht, um die Stiegen zu waschen. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

ABC

Lösung:

	Arbeit in einer Stunde	Arbeit in zwei Stunden
Herr Schmid	$\frac{W}{x} \cdot 1\,h$	$\frac{W}{x} \cdot 2\,h$
Frau Schmid	$\frac{W}{x - 3\,h} \cdot 1\,h$	$\frac{W}{x - 3\,h} \cdot 2\,h$

W ... Gesamtarbeit
Herr Schmid braucht alleine x Stunden, erledigt also in einer Stunde $\frac{W}{x}$. Seine Frau benötigt $(x - 3)$ Stunden, also beträgt die Arbeit pro Stunde $\frac{W}{x - 3\,h}$. In zwei Stunden erledigen sie daher $\frac{W}{x} \cdot 2\,h$ bzw. $\frac{W}{x - 3\,h} \cdot 2\,h$.

Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\,h\}$

$$\frac{W}{x} \cdot 2\,h + \frac{W}{x - 3\,h} \cdot 2\,h = W \qquad |:W$$

$$\frac{2\,h}{x} + \frac{2\,h}{x - 3\,h} = 1 \qquad |\cdot x \cdot (x - 3\,h)$$

$2 \cdot (x - 3) + 2 \cdot x = x^2 - 3 \cdot x$

Die weiteren Berechnungen erfolgen ohne Einheiten

$2x - 6 + 2x = x^2 - 3x$
$x^2 - 7x + 6 = 0$
$x_1 = 6\,h, x_2 = 1\,h$

$x_2 = 1\,h$ kommt als Lösung nicht in Frage.

Probe:
Herr Schmid: 6 Stunden, Frau Schmid: 3 Stunden (3 Stunden weniger)
Herr Schmid erledigt $\frac{1}{6}$ der Arbeit pro Stunde und Frau Schmid erledigt $\frac{1}{3}$ der Arbeit pro Stunde. Zusammen erledigen sie pro Stunde $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ der Arbeit, also benötigen sie zusammen für die ganze Arbeit 2 Stunden.

Allein benötigt Herr Schmid 6 Stunden und seine Frau 3 Stunden.

3.123 Zwei Pumpen füllen ein Schlauchboot S in 6 Minuten mit Luft auf. Wenn jede Pumpe einzeln eingesetzt wird, benötigt Pumpe A um 2 Minuten länger als Pumpe B.

ABC

1) Für welche Größe steht die Variable x in der gegebenen Gleichung?
$\frac{S}{x} \cdot 6\,min + \frac{S}{x + 2\,min} \cdot 6\,min = S$

2) Berechne, in welcher Zeit jede Pumpe das Schlauchboot alleine aufpumpt.

3.124 Zwei Röhren füllen einen Behälter gemeinsam in 14 Minuten. Die eine Röhre braucht alleine zum Füllen um 10 Minuten länger als die andere. Wie lang braucht jede Röhre allein?

AB

3.125 Zum Drucken einer Zeitschrift braucht die Maschine E um acht Stunden länger als die Maschine F. Zusammen benötigen sie drei Stunden.

ABD

1) In wie viel Stunden schafft jede der Maschinen allein die Arbeit?

2) Gib die Gleichung zur Berechnung der Druckdauer an, wenn die beiden Maschinen zusammen a Stunden benötigen. Zeige, dass die Gleichung immer zwei reelle Lösungen hat.

Vermischte Aufgaben

ABC **3.126** Einige Klassen einer HTL wollen am Samstag im Kino einen Film anschauen.
Der Preis für die Extravorführung beträgt 462,00 €. Da sieben Schüler mehr kommen als ursprünglich geplant, wird die Kinokarte für jeden Anwesenden um 0,50 € billiger. Wie viele Schüler waren tatsächlich im Kino? Dokumentiere deine Vorgehensweise.

AB **3.127** Eine Reisegruppe mietet ein Boot um 60,00 €. Da vier Teilnehmer kurzfristig absagen, steigen die Kosten für die restlichen Teilnehmer um 2,50 € pro Person. Wie groß war die Reisegruppe ursprünglich?

ABC **3.128** Die Form der Flugbahn einer Boccia-Kugel wird durch die Gleichung $y = 1 + x - 0{,}2x^2$ beschrieben. x ist die horizontale Entfernung von der Abwurfstelle (in m), y die Höhe der Kugel über dem Boden (in m).

1) Welche Gleichung muss gelöst werden, um zu ermitteln, wie weit die Kugel fliegt? Löse diese Gleichung und gib die Wurfweite an.

2) Formuliere eine Frage so, dass die Gleichung $1{,}5 = 1 + x - 0{,}2x^2$ gelöst werden muss.

AB **3.129** In einer Klasse verabschieden sich alle Studierenden voneinander. Insgesamt gibt es 190 Verabschiedungen. Berechne die Anzahl der Studierenden in der Klasse.

Lösung:

x ... Anzahl der Studierenden

x − 1 ... Anzahl der Mitstudierenden

Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

$\frac{x \cdot (x-1)}{2} = 190$

$x \cdot (x-1) = 380$

$x^2 - x - 380 = 0$

$x_1 = 20, \ x_2 = -19$

$x = 20$

- Jeder Studierende hat (x − 1) Mitstudierende. Wenn alle x Studierenden sich von allen Mitstudierenden verabschieden, gibt es $x \cdot (x-1)$ mögliche Verabschiedungen.
- Wenn sich zB Erich von Willi verabschiedet hat, wird sich Willi nicht noch einmal von Erich verabschieden. Die tatsächliche Anzahl beträgt also $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$ Verabschiedungen.
- $x_2 = -19$ kommt als Lösung nicht in Frage.

Probe:

Anzahl der Verabschiedungen unter den Studierenden: $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

In der Klasse befinden sich 20 Studierende.

AB **3.130** Zur Vorbereitung auf eine Prüfung reicht jeder Studierende an jeden Mitstudierenden seine ausgearbeiteten Fragen weiter. Insgesamt werden 506 Ausarbeitungen weitergereicht. Wie viele Studierende sind in der Klasse?

ABD **3.131** Nach einer Feier werden zur Verabschiedung 45-mal die Hände geschüttelt.

1) Berechne, wie viele Personen bei der Feier waren, wenn sich jeder von jedem verabschiedet hat.

2) Stimmt die Aussage: Bei doppelt so vielen Personen werden 90-mal die Hände geschüttelt? Begründe deine Antwort.

ABD **3.132** Stehen zwei Größen so im Verhältnis zueinander, dass gilt $a : b = (a + b) : a$, so spricht man vom goldenen Schnitt (vergleiche Band 1, Seite 207). Zeige, dass daraus folgt:
$a : b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : 1$

Zusammenfassung

Der Graph einer **quadratischen Funktion** ist eine **Parabel**. Die Funktionsgleichung lässt sich in der **Scheitelpunktform** oder **Polynomform** darstellen.

Scheitelpunktform: $y = a \cdot (x - b)^2 + c$ bzw. $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$
$a \neq 0$, Scheitel $S(b|c)$ bzw. $S(x_S|y_S)$

Polynomform: $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad a_2 \neq 0$

- $0 < |a| < 1$ bzw. $0 < |a_2| < 1$ ... Die Parabel ist **breiter** als die Grundparabel.
  $|a| > 1$ bzw. $|a_2| > 1$ ... Die Parabel ist **schmäler** als die Grundparabel.
- $a > 0$ bzw. $a_2 > 0$ ... Die Parabel ist nach **oben geöffnet**.
  $a < 0$ bzw. $a_2 < 0$ ... Die Parabel ist nach **unten geöffnet**.
- $c > 0$ ... Verschiebung in **positive y-Richtung**
  $c < 0$ ... Verschiebung in **negative y-Richtung**
- a_0 ... y-Koordinate des Schnittpunkts der Parabel mit der y-Achse
- $b > 0$ ... Verschiebung in **positive x-Richtung**
  $b < 0$ ... Verschiebung in **negative x-Richtung**

Interpolation: Zur Berechnung von Zwischenwerten einer nur durch Wertepaare gegebenen Funktion kann die lineare oder die quadratische Interpolation verwendet werden.

Eine **quadratische Gleichung** kann in **Normalform** oder **allgemeiner Form** gegeben sein:

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Kleine Lösungsformel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$

Große Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die **Lösungen** einer quadratischen Gleichung entsprechen den **Nullstellen** der zugehörigen quadratischen Funktion. Die Anzahl der Lösungen ist von der **Diskriminanten** D abhängig.
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $D = b^2 - 4ac$

- $D > 0$: zwei reelle Lösungen (zwei Nullstellen)
- $D = 0$: eine reelle (Doppel-)Lösung (eine Nullstelle)
- $D < 0$: keine reelle Lösung (keine Nullstelle)

Satz von Vieta, Zerlegung in Linearfaktoren:
$x_1 + x_2 = -p, \; x_1 \cdot x_2 = q, \; (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + px + q$

Weitere Aufgaben

3.133 Wie viele Nullstellen kann eine Parabel haben? Zeichne für jeden Fall eine Skizze. BC

3.134 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antworten. D

1) Eine quadratische Gleichung hat immer zwei reelle Lösungen.
2) Beim Lösen einer quadratischen Gleichung kann die Diskriminante nie negativ sein.
3) Die grafische Darstellung einer quadratischen Funktion kann eine Gerade sein.
4) Die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion.
5) Berührt die Parabel die x-Achse, dann ist die Diskriminante gleich null.

Quadratische Funktionen und Gleichungen

C **3.135** Gib die Koordinaten des Scheitels an und bestimme, ob die Parabel nach unten oder oben geöffnet ist.
a) $y = (x + 7)^2$ **b)** $y = -5 \cdot (x - 1)^2 + 4$ **c)** $y = 2 \cdot (x + 1)^2 - 3$ **d)** $y = -4 \cdot (x - 7)^2 - 2$

BC **3.136** Skizziere den Graphen der gegebenen Funktion. Verwende dazu den Scheitel und den Schnittpunkt mit der y-Achse. Gib die Anzahl der Nullstellen an. Kontrolliere mit Technologieeinsatz. Beschreibe den Unterschied zwischen den Graphen.
1) $f(x) = x^2 + 1; x \in [-3; 3]$ **2)** $f(x) = (x - 3)^2; x \in [-1; 5]$ **3)** $f(x) = (x - 5)^2 - 1; x \in [-1; 8]$

AB **3.137** Gib die Funktionsgleichung der Parabel an, die entsteht, wenn man die Grundparabel $y = x^2$ so verschiebt, dass der Scheitel im Punkt S liegt.
a) $S(2|2)$ **b)** $S(-1|3)$ **c)** $S(5|-4)$ **d)** $S(-3|-7)$

AC **3.138** Bestimme die Scheitelpunkte und gib die Gleichungen der abgebildeten Funktionen an. Beschreibe jeweils die Veränderung zur Grundparabel.
a) **b)** **c)**

AB **3.139** Löse folgende Gleichungen ohne TE. Überlege, welcher Lösungsweg der günstigste ist.
a) 1) $v^2 - 49 = 0$ **2)** $(x - 3)(x - 4) = 0$ **3)** $x^2 + 2x - 8 = 0$ **4)** $0{,}2x^2 - x = 0$
b) 1) $2x^2 - 3x - 9 = 0$ **2)** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ **3)** $m^2 + 16 = 0$ **4)** $x^2 - 6x - 7 = 0$
c) 1) $-5x^2 - 30x = 0$ **2)** $3x^2 - 15x + 18 = 0$ **3)** $\left(x + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ **4)** $(x - s^2)(x + s) = 0$
d) 1) $(x - 5)(x + 5) = 0$ **2)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **3)** $h^2 - \frac{121}{400} = 0$ **4)** $0{,}5x^2 + 5{,}5x = 0$

BD **3.140** Die Gleichung $x^2 - 3x - 4 = 0$ wurde mithilfe einer Lösungsformel gelöst. Erkläre, welche Fehler gemacht wurden und wie diese die Lösungen beeinflussen.
1) $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}$ **2)** $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4}$ **3)** $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{16} - 4}$

BD **3.141** Von einer quadratischen Gleichung kennt man die Lösungen. Erkläre, wie man mithilfe der Lösungen die Gleichung angeben kann und gib sie an.
a) $L = \{3; 5\}$ **b)** $L = \{-1; 7\}$ **c)** $L = \{-2; -3\}$ **d)** $L = \left\{\frac{1}{2}; -4\right\}$

B **3.142** Bestimme den fehlenden Koeffizienten und die zweite Lösung der Gleichung.
a) $x^2 - 3x + q = 0 \quad x_1 = 6$ **b)** $x^2 + px + 52 = 0 \quad x_1 = -13$ **c)** $x^2 + 7x + q = 0 \quad x_1 = 8$

B **3.143** Gib den Term auf der linken Seite der Gleichung als Quadrat eines Binoms an und löse anschließend die Gleichung.
a) $x^2 + 4x + 4 = 0$ **b)** $x^2 + 26x + 169 = 0$ **c)** $x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{100} = 0$ **d)** $x^2 - 1{,}2x + 0{,}36 = 0$

Aufgaben 3.144 – 3.146: Vereinfache jeweils so weit wie möglich und löse anschließend.

B **3.144** **a)** $(2x + 3) \cdot (1 + x) = 4x^2 - 22$ **c)** $4 \cdot (x^2 - 3) - x \cdot (3x + 1) = 6 \cdot (5x + 2)$
b) $(2x - 1) \cdot (x + 1) = 5x + 5$ **d)** $(x - 2) \cdot (x + 2) + 21 = 6x^2 - 4x + 17$

B **3.145** **a)** $(4x + 1)^2 = (x + 4) \cdot (9x - 5)$ **b)** $(2x + 1)^2 + 8 + 8x = 0$ **c)** $(x - 1)^2 + 1 = -(5x - 3)^2$

B **3.146** **a)** $3x^2 - (x - 5) \cdot x = (3x - 2)^2 + 7x - 2$ **b)** $9x^2 + (4x - 3)^2 = (x - 1) \cdot (x + 1) - (x + 1)^2$

Quadratische Funktionen und Gleichungen

3.147 Gib die quadratischen Terme in Form von Linearfaktoren an und vereinfache. B

a) $\frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6}$ **b)** $\frac{5x^2 - 16x + 3}{(x - 3)^2}$ **c)** $\frac{x^2 - 16}{4x^2 - 15x - 4}$ **d)** $\frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3x + 1}$ **e)** $\frac{(x + 16)^2 \cdot (x - 18)}{x^2 - 2x - 288}$

3.148 Forme in die Scheitelpunktform um und gib den Scheitel der Parabel an. Berechne anschließend die Nullstellen und überprüfe durch eine Zeichnung. BC

a) $x^2 + 6x + 2 = 0$ **b)** $x^2 - 7x - 30 = 0$ **c)** $x^2 - 8x + 7 = 0$ **d)** $x^2 + 3x - 10 = 0$

TE

3.149 Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktion. Zeige, dass die x-Koordinate des Scheitels in der Mitte der Nullstellen liegt. BD

a) $f(x) = 25x^2 - 4$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 4x$ **c)** $f(x) = x^2 + 4x - 32$ **d)** $f(x) = 4x^2 - 17x - 15$

3.150 Bestimme die Nullstellen der Parabel. Gib jeweils an, welche Bedingungen die Parameter erfüllen müssen, damit die Parabel zwei Nullstellen, eine Nullstelle oder keine Nullstelle hat. BC

a) $y = ax^2 + bx$ **b)** $y = x^2 + bx$ **c)** $y = x^2 + c$ **d)** $y = ax^2 + bx + c$ **e)** $y = ax^2 + c$

3.151 Ermittle die Funktionsgleichung der dargestellten quadratischen Funktion ABD

1) mithilfe des Scheitels,

2) mithilfe der Nullstellen,

3) mithilfe eines Gleichungssystems

und gib sie in Polynomform an.

Welche Methode scheint dir am besten geeignet zu sein?

3.152 Gib die Parabelgleichung an, deren Graph durch die drei Punkte verläuft. AB

a) P(0|7), Q(2|11), R(−1|14) **b)** P(2|0), $Q\left(-3\middle|-\frac{5}{4}\right)$, R(−6|4)

TE

3.153 Eine Parabel berührt die x-Achse und verläuft durch die Punkte A und B. Bestimme die Parabelgleichungen. AB

a) A(2|2), B(3|8) **b)** A(−3|32), B(4|2) **c)** A(0|−6), B(1|−1,5)

3.154 Eine Parabel hat ihren Scheitel auf der y-Achse und verläuft durch die Punkte A und B. Bestimme die Parabelgleichung. AB

a) A(−1|3,5), B(2|11) **b)** A(−2|6), B(−0,5|1,5) **c)** A(−4|−3,5), B(2|−0,5)

3.155 Verschiebe die gegebene Parabel so, dass sie durch die gegebenen Punkte verläuft. Gib die Gleichung der neuen Parabel an. AB

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ P(−2|4), R(2|0) **b)** $y = 3x^2$ P(−2|−6), R(−3|1) **c)** $y = 2x^2$ P(−1|−4,5), R(1|−2,5)

3.156 Die Dichte von Wasser nimmt mit der Temperatur ab. Folgende Werte sind bekannt: $\left(40\,°C\middle|992{,}21\,\frac{g}{dm^3}\right)$, $\left(60\,°C\middle|983{,}19\,\frac{g}{dm^3}\right)$, $\left(90\,°C\middle|965{,}30\,\frac{g}{dm^3}\right)$ BC

1) Berechne die Dichte bei 50 °C bzw. 70 °C näherungsweise mithilfe linearer Interpolation und mithilfe einer Näherungsparabel.

2) Vergleiche die berechneten Werte mit Tabellenwerten aus dem Internet.

TE

Aufgaben 3.157 – 3.159: Löse die Gleichungen.

3.157 **a)** $\frac{78}{x + 2} - 15 = \frac{2x^2}{x + 2} - x$ **b)** $\frac{x + 2}{x} + \frac{x}{x - 2} = 0$ **c)** $\frac{x + 5}{x + 3} = \frac{2x + 1}{x + 11}$ B

3.158 **a)** $\frac{5x}{x - 1} + \frac{x + 1}{x + 4} = \frac{21 + x}{x + 4}$ **b)** $1 - \frac{4}{x + 4} = \frac{4x + 5}{5}$ **c)** $\frac{x^2 + 15x}{(x + 3) \cdot (x - 3)} = \frac{2x + 3}{x - 3} - \frac{x - 3}{x + 3}$ B

3.159 **a)** $\frac{2x + 1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} = 2 \cdot \frac{x - 2}{(x + 3)^2}$ **b)** $\frac{2x^2 - 5x + 5}{4x^2 - 9} = \frac{7x + 2}{6x + 9} + \frac{3x + 1}{4x - 6}$ **c)** $\frac{6}{x - 6} + \frac{6}{x + 6} = \frac{x^2 + 36}{x^2 - 36}$ B

BCD **3.160** Bildet Dreiergruppen. Wählt je eine der dargestellten Möglichkeiten aus, die Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$ grafisch zu lösen.

1) Erklärt jeweils für die ausgewählte Methode die Lösungsstrategie und kontrolliert durch Rechnung.

2) Überlegt anschließend gemeinsam, welche Möglichkeiten es noch gibt. Erstellt passende Zeichnungen.

A B C

BD **3.161** Bestimme von der gegebenen Parabel den Parameter k jeweils so, dass die Parabel entweder zwei, eine oder keine Nullstelle hat.

a) $y = 2x^2 - x + k$ **b)** $y = kx^2 + 4x + 1$ **c)** $y = x^2 - kx + 2$ **d)** $y = x^2 - 5x - k$

AB **3.162** Eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x + q = 0$ ist doppelt so groß wie die andere. Berechne die beiden Lösungen und den fehlenden Koeffizienten.

AB **3.163** Eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + 6 = 0$ ist um 5 größer als die andere. Berechne die beiden Lösungen und den fehlenden Koeffizienten.

BC **3.164** Bestimme p so, dass die quadratische Gleichung $x^2 + px + 4 = 0$

1) genau eine Lösung, **2)** zwei Lösungen, **3)** keine Lösung hat.

B **3.165** Ermittle im Kopf die Linearfaktoren, ohne die Gleichung zu lösen.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ **c)** $x^2 - 2x - 3 = 0$ **e)** $x^2 - 5x + 6 = 0$ **g)** $x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ **d)** $x^2 - x - 6 = 0$ **f)** $x^2 - 3x + 2 = 0$ **h)** $x^2 + x - 6 = 0$

Textaufgaben

AB **3.166** Quadriert man eine ganze Zahl und addiert dann 3, so ist ein Viertel dieser Summe gleich einem Drittel des Quadrats dieser Zahl. Berechne die gesuchte Zahl.

AB **3.167** Ein rechteckiger Saal hat eine Grundfläche von 52 m^2. Die längere Seite ist um 1,5 m länger als die kürzere. Berechne die Maße der Grundfläche.

AB **3.168** Werden zwei parallele Seiten eines Quadrats um je 12 cm verlängert, so entsteht ein Rechteck, dessen Diagonale 5-mal so lang ist wie die Quadratdiagonale. Wie lang ist die Seite des Quadrats?

ABC **3.169** Ein Tor hat die Form einer Parabel, die 5 m hoch und unten 3,2 m breit ist. Fahrzeug A ist 2 m breit und 3,1 m hoch, Fahrzeug B ist 2,4 m breit und 2,0 m hoch.

1) Überprüfe rechnerisch, ob beide Fahrzeuge die Tordurchfahrt passieren können.

2) Falls eines der beiden Fahrzeuge zu hoch ist, gib an, um wie viel.

3.170 Der Schirm einer Baseballkappe hat eine durch zwei Parabeln begrenzte Form.
1) Gib die beiden Parabelgleichungen an.
2) Wie lauten die beiden Parabelgleichungen, wenn man die Kappe um 180° dreht?
3) Die Kappe wird um 90° gedreht. Erkläre, ob man die Begrenzungskurven nun noch durch Funktionsgleichungen beschreiben kann.

y
18 cm
x
6 cm
14 cm

ABCD

3.171 Um eine Baugrube auszuheben, braucht der eine Bagger acht Tage länger als der andere. Zusammen benötigen sie drei Tage. Wie lang braucht jeder Bagger allein?

AB

3.172 Eine Gruppe möchte vor Weihnachten eine Exkursion nach Christkindl (Bezirk Steyr, OÖ) machen. Der Pauschalpreis für den Bus beträgt 180,00 €. Da sich noch sechs weitere Personen anmelden, verringert sich der Preis für jede um 1,00 €. Wie viele Personen nehmen an der Exkursion teil?

AB

3.173 Die Abmessungen eines Blatts im DIN-A0-Format ergeben sich aus folgenden Bedingungen: Der Flächeninhalt des Blatts beträgt 1 m^2. Beim Falten in der Mitte der längeren Seite entsteht ein Rechteck, welches zum ursprünglichen Rechteck ähnlich ist. Berechne die Seitenlängen und vergleiche sie mit den Normwerten.

ABC

3.174 Der Zusammenhang zwischen Höhe h (in Meter) und Zeit t (in Sekunden) eines senkrecht nach oben geworfenen Balls lässt sich durch folgende Funktion nähern:
$h(t) = -5 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 7{,}25$
1) Stelle die Funktion grafisch dar und erkläre, warum der Graph parabelförmig ist, obwohl der Ball senkrecht nach oben geworfen wird.
2) In welcher Höhe befindet sich der Ball nach 0,5, nach 1,5 und nach 2 Sekunden?
3) Ermittle durch Umformung in die Scheitelpunktform, wie lang es dauert, bis der Ball seine maximale Höhe erreicht und wie hoch er zu diesem Zeitpunkt ist. Beschrifte diesen Punkt in deiner Zeichnung.
4) Gib an, aus welcher Höhe der Ball hochgeworfen wird. Zu welchem anderen Zeitpunkt befindet sich der Ball noch einmal in dieser Höhe? Bestimme diesen Zeitpunkt auf zwei verschiedene Arten und beschreibe deine Vorgehensweise.
5) Wann erreicht der Ball eine Höhe von 15 m? Wie lang dauert es, bis er am Boden landet? Ermittle die Zeiten grafisch und rechnerisch. Erkläre den Zusammenhang zwischen grafischer und rechnerischer Lösung.
6) Welche Parameter kann man ändern, damit der Ball eine maximale Höhe von 20 m erreicht?

ABCD
TE

3.175 Ein Bogenschütze schießt aus 1,7 m Höhe unter einem Winkel von 86° einen Pfeil mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 18{,}3\,\frac{m}{s}$ nach oben ab. Der Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Sekunden) und der Höhe h (in Meter) des Pfeils lässt sich durch die Funktion $h(t) = h_0 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ beschreiben.
1) Bestimme die Nullstellen dieser Funktion. Welche hat eine „praktische" Bedeutung?
2) Wie lang dauert es, bis der Pfeil wieder die Abschusshöhe erreicht?
3) Bestimme den Scheitelpunkt dieser Funktion und erkläre dessen Bedeutung mit eigenen Worten.

ABCD
TE

AB **3.176** Auf einem Schiff wird eine blaue Wasserbombe vom Promenadendeck, das sich 10 m über der Meeresoberfläche befindet, fallen gelassen. Gleichzeitig wird eine rote Wasserbombe vom 15 m hohen Oberdeck mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $5\,\frac{m}{s}$ ins Meer geworfen. Der Zusammenhang zwischen dem Fallweg s (in Meter) und der Fallzeit t (in Sekunden) lässt sich durch die Funktion $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ beschreiben ($g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, v_0 ... Anfangsgeschwindigkeit in $\frac{m}{s}$).

Ergänze die folgenden Sätze:

1) Die rote Wasserbombe taucht um ... Sekunden ... (früher/später) als die blaue ein.
2) Eine halbe Sekunde nach dem Abwurf befindet sich die rote Wasserbombe genau ... Meter unter der Abwurfstelle.
3) Für die ersten 5 m benötigt die rote Wasserbombe ... Sekunden.
4) Für die letzten 5 m vor dem Eintauchen benötigt die rote Wasserbombe ... Sekunden.
5) Wenn die blaue Wasserbombe 5 m über dem Wasser ist, befindet sich die rote Wasserbombe ... Meter unter der Abwurfstelle.
6) Wenn die blaue Wasserbombe 3 m unter der Abwurfstelle ist, befindet sich die rote Wasserbombe ... Meter über dem Wasser.
7) Nach einer halben Sekunde hat die blaue Wasserbombe ... Meter zurückgelegt.
8) Nach zwei Hundertstelsekunden hat die blaue Wasserbombe ... Zentimeter zurückgelegt; in der zweiten Hundertstelsekunde ... Zentimeter.

ABCD TE **3.177** Die Firma Hotvolley erzeugt Volleybälle. Die Kostenfunktion K (in GE) pro Monat ist durch $K(x) = 25\,000 + 5 \cdot x$ gegeben. Die monatliche Kapazität beträgt 12 000 Bälle. Die Anzahl x der verkauften Bälle ist vom Preis abhängig. Es besteht folgender Zusammenhang:
$x(p) = 20\,000 - 1\,000 \cdot p$

1) Wie groß sind die Fixkosten pro Monat?
2) Ab welchem Preis würden keine Bälle verkauft werden?
3) Ermittle die Preisfunktion p(x). Erkläre den Zusammenhang mit x(p).
4) Gib die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion an.
5) Berechne die Gewinngrenze, die Gewinnschwelle und den maximalen Gewinn.
6) Überprüfe die Ergebnisse aus ***5)*** grafisch.

AB **3.178** Annas Schulweg ist 3 km lang. Drei Fünftel ihres Schulwegs kann sie auf einer waagrechten Straße recht schnell mit ihrem Rad fahren. Die restliche Strecke steigt an, sodass die Fahrgeschwindigkeit im Mittel um $\frac{10}{3}\,\frac{m}{min}$ geringer ist als vorher. Für den ganzen Weg benötigt Anna 15 Minuten. Berechne die Geschwindigkeiten und die Fahrzeiten für beide Teilstrecken.

AB **3.179** In einer Tanzschule, in der das Verhältnis Mädchen zu Burschen 3 : 2 beträgt, tanzt jedes Mädchen mit jedem Burschen. Es ergeben sich 600 verschiedene Möglichkeiten. Wie viele Mädchen und Burschen gibt es in der Tanzschule?

AB **3.180** Auf einem Adventmarkt werden 200 rote und 200 blaue Kugeln verkauft. In den Dosen mit roten Kugeln sind um zwei Kugeln mehr als in den Dosen mit blauen Kugeln. Von den blauen Kugeln werden um fünf Dosen mehr verkauft. Berechne jeweils die Anzahl der Kugeln pro Dose und die Anzahl der verkauften Dosen.

Weitere Aufgaben in den Zusatzheften

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne den Graphen einer quadratischen Funktion und kann dessen Form beschreiben.	
2	Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ zu? Begründe deine Antwort. A) Wenn $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt, hat die Funktion immer zwei Nullstellen. B) Ist $b = 0$, dann hat die Funktion keine Nullstelle. C) Der Scheitel befindet sich an der Stelle $x = -\frac{b}{2a}$. D) Ist $a < 0$, dann ist die Parabel nach oben geöffnet. E) Wenn $a < 0$ ist, dann ist die Funktion bis zum Scheitel streng monoton steigend, danach streng monoton fallend. F) Ist $a \neq 0$, gilt immer $f(0) = 0$.	
3	Ich kann anhand des Graphen dessen Funktionsgleichung erkennen. A) $y = ax^2 + c, a > 0, c < 0$ B) $y = ax^2 + c, a > 0, c > 0$ C) $y = x^2 + bx, b < 0$ D) $y = x^2 + bx, b > 0$ **1)** **2)**	
4	Ich kann verschiedene Zusammenhänge nennen, die durch eine quadratische Funktion beschrieben werden können.	
5	Welche der folgenden Gleichungen beschreibt die momentane Höhe eines fallen gelassenen Steins? A) $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0$ B) $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h_0$ C) $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$	
6	Ich kann erklären, woran man die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung erkennt.	
7	Skizziere je eine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + c$, die genau eine, keine Nullstelle bzw. zwei Nullstellen hat. Begründe auch rechnerisch.	
8	Ich kann eine quadratische Gleichung mithilfe einer Lösungsformel lösen. ZB: **1)** $x^2 - 4x + 4 = 0$, **2)** $4x^2 - 12x + 5 = 0$	
9	Ich kann den gegebenen Ausdruck in Linearfaktoren zerlegen: $x^2 - 4x - 21$	
10	Ich kann Zwischenwerte mithilfe einer linearen bzw. quadratischen Funktion interpolieren.	
11	Erkläre, wie mit Technologieeinsatz die Gleichung der Parabel bestimmt werden kann, die durch drei Punkte verläuft.	

Lösung:
1) siehe Seiten 44ff 2) A) richtig, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$, B) falsch, eine Nullstelle $x = 0$, C) richtig, da der Scheitel zwischen den beiden Nullstellen liegt), D) falsch, siehe Seite 45, E) richtig, da nach unten geöffnet, F) richtig, $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 = 0$ 3) 1D, 2B 4) siehe Seiten 52ff 5) B 6) siehe Seite 61 7) – 8) 1) $x_{1,2} = 2$, 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$ 9) $(x - 7) \cdot (x + 3)$ 10) siehe Seite 48 11) siehe Aufgabe 3.8

4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Viele Wachstums- oder Zerfallsvorgänge lassen sich mithilfe von Änderungsfaktoren beschreiben. Kapital, das längerfristig verzinst wird, wächst jährlich um den vereinbarten Zinssatz, beim Zerfall radioaktiver Stoffe halbiert sich die Ausgangsmenge in einer annähernd konstanten Zeitspanne, der Halbwertszeit. Solche und ähnliche Vorgänge lassen sich mathematisch durch Funktionen erfassen, bei denen die Variable im Exponenten auftritt. Die so gebildeten Funktionen heißen daher **Exponentialfunktionen**.

4.1 Exponentialfunktionen

4.1.1 Einleitung

ABCD **4.1** In einer Firma mit 2 000 Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern wird ein Gerücht verbreitet. Jede Person, die davon erfährt, erzählt es binnen zehn Minuten genau einer Person, die es noch nicht kennt. Um 8:10 Uhr sind vier Personen eingeweiht, um 8:20 Uhr bereits acht, usw.

1) Gib an, wie viele Personen um 8:40 Uhr, um 8:50 Uhr und um 9:00 Uhr Bescheid wissen.
2) Wie lange dauert es, bis über 100 Personen informiert sind?
3) Überprüfe, ob bis zur Mittagspause um 12:00 Uhr schon alle informiert sind.
4) Begründe mit eigenen Worten, warum die Ausbreitung des Gerüchts in der Realität wahrscheinlich nicht genau so abläuft.

Anhand eines Beispiels werden nun die Eigenschaften und Merkmale einer Exponentialfunktion untersucht und die Unterschiede zu einer linearen Funktion aufgezeigt.

ZB: Ein Medizinstudent arbeitet an einer Studie über einen Bakterienstamm. Zu Beginn seiner Beobachtung sind 100 Bakterien vorhanden, deren Anzahl sich täglich verdoppelt. Die erforderliche Dokumentation umfasst zu Beginn eine Seite und wird jeden weiteren Tag um zwei Seiten ergänzt. Im Folgenden werden das Bakterienwachstum und der wachsende Umfang der Dokumentation mithilfe einer Wertetabelle untersucht, grafisch dargestellt und jeweils ein Funktionsterm entwickelt.

Dokumentation

t ... Anzahl der Tage; s ... Anzahl der Seiten

t	s
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9

(t jeweils + 1; s jeweils + 2)

Wird die Anzahl t der Tage um 1 vergrößert, so wird die Anzahl s der Seiten um 2 erhöht. Aus der **Addition von 1** zur unabhängigen Variablen t folgt eine **Addition von 2** zur abhängigen Variablen s.

Bakterien

t ... Anzahl der Tage; b ... Anzahl der Bakterien

t	b
0	100
1	200
2	400
3	800
4	1 600

(t jeweils + 1; b jeweils · 2)

Wird die Anzahl t der Tage um 1 vergrößert, so wird die Anzahl b der Bakterien verdoppelt. Aus der **Addition von 1** zur unabhängigen Variablen t folgt eine **Multiplikation** der abhängigen Variablen b **mit 2**.

Ermitteln der Funktionsgleichungen:

Die von der Anzahl t der vergangenen Tage abhängige Seitenanzahl s kann durch eine lineare Funktion ermittelt werden.

$t = 0$: $s(\mathbf{0}) = 1$
$t = 1$: $s(\mathbf{1}) = 1 + 2 \cdot \mathbf{1}$
$t = 2$: $s(\mathbf{2}) = 1 + 2 \cdot \mathbf{2}$
$t = 3$: $s(\mathbf{3}) = 1 + 2 \cdot \mathbf{3}$
...

Allgemein: $s(t) = 1 + 2t$

Die von der Anzahl t der vergangenen Tage abhängige Bakterienanzahl b kann ebenfalls als Funktion angegeben werden.

$t = 0$: $b(\mathbf{0}) = 100 = 100 \cdot 2^{\mathbf{0}}$
$t = 1$: $b(\mathbf{1}) = b(0) \cdot 2 = 100 \cdot 2^{\mathbf{1}}$
$t = 2$: $b(\mathbf{2}) = b(1) \cdot 2 = 100 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^{\mathbf{2}}$
$t = 3$: $b(\mathbf{3}) = b(2) \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^{\mathbf{3}}$
...

Allgemein: $b(t) = 100 \cdot 2^t$
Bei dieser Funktion steht die unabhängige Variable t im Exponenten. Sie heißt daher **Exponentialfunktion**.

Jede Funktion der Form $y(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ heißt **Exponentialfunktion** mit der Basis a. Eine Exponentialfunktion entspricht einer fortlaufenden Multiplikation mit einem konstanten Faktor.
Wird zum Argument x ein Wert h addiert, so wird der Funktionswert mit dem Faktor a^h multipliziert: $y(x + h) = a^{x+h} = a^x \cdot a^h$

Beachte: Bei einer **Potenzfunktion** steht die Variable in der Basis, zum Beispiel $y(x) = x^2$, $y(x) = x^{-3}$.
Bei einer **Exponentialfunktion** steht die Variable im Exponenten, zum Beispiel $y(x) = 2^x$, $y(x) = 1{,}5^{-x}$.

4.2 Erkläre mit eigenen Worten, welche der angegebenen Wertetabellen einen linearen und welche einen exponentiellen Zusammenhang beschreibt. Erkläre den Unterschied. CD

A)

x	0	2	4	6	8
y_1	1	9	81	729	6 561

B)

x	0	2	4	8	10
y_2	3	4	5	7	8

4.3 Stelle die Funktionen $y_1 = 3x + 2$ und $y_2 = 2 \cdot 3^x$ grafisch dar. Zeige, dass es sich einmal um ein lineares und das andere Mal um ein exponentielles Wachstum handelt. BD

4.1.2 Die Euler'sche Zahl

Am 15. April 2007 jährte sich der Geburtstag des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler zum 300. Mal. Es gibt kaum ein Gebiet der Mathematik, zu dem er keinen wichtigen Beitrag geleistet hat. Der Beweis, dass die Dreiteilung des Winkels mit Lineal und Zirkel unmöglich ist, stammt ebenso von Euler wie die Erklärung, warum der Himmel blau ist und der Mond beim Aufgehen größer erscheint als hoch am Himmel stehend. Euler hat der Kreiszahl den Namen π gegeben und jene Formel formuliert, die 1990 in einer Umfrage einer mathematischen Fachzeitschrift zur schönsten Formel der Mathematik gewählt wurde. Wir werden sie im Abschnitt 7 „Die komplexen Zahlen" kennen lernen. Diese Formel enthält unter anderem die Konstante **e**, die **Euler'sche Zahl**. Sie wurde von Euler nach dem ersten in der Mathematik nicht oft verwendeten Buchstaben des Alphabets benannt. Im Folgenden werden wir uns mit der historischen und der mathematischen Bedeutung dieser Zahl befassen.

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Ein kurzer Blick in die Geschichte

Mit dem Taschenrechner führt man heute durch Drücken einiger Tasten viele jener Berechnungen durch, deren Ausführung für Mathematiker früherer Jahrhunderte noch eine echte Herausforderung darstellte. Im 16. Jh. erstellte Michael Stifel (deutscher Mathematiker, 1487 – 1567) Zahlentafeln, die es ermöglichten, Multiplikationen auf das Addieren von Tabellenwerten zurückzuführen.

Er tabellierte die Werte der Potenzen von $1{,}1^n$ auf eine Dezimalstelle gerundet und erhielt eine so genannte Exponentialtafel mit der Basis 1,1.

n	1	2	3	4	5	6	7	...	11	12	13	...	22	23	24	25
$1{,}1^n$	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	1,9	...	2,9	3,1	3,5	...	8,1	9,0	9,8	10,8

Tabelle 4.1

Mithilfe dieser Tabelle konnte man das (gerundete) Ergebnis einer Multiplikation erhalten, indem man die entsprechenden Hochzahlen addierte:
ZB: $1{,}8 \cdot 1{,}9 \approx 1{,}1^6 \cdot 1{,}1^7 = 1{,}1^{13} \approx 3{,}5$ (genau: 3,452)

Die Genauigkeit dieser Methode kann durch Ändern der Basis auf 1,01 bzw. 1,001 usw. verbessert werden. Jost Bürgi (Schweizer Uhrmacher, 1552 – 1632) erstellte Exponentialtafeln mit der Basis 1,0001, die von Johannes Kepler (1571 – 1630) bei der Berechnung der Planetenbahnen benützt wurden. Auch der Schotte John Napier (Mathematiker, 1550 – 1617) erstellte ähnliche Tafeln und stellte – unter Berücksichtigung der jeweiligen Genauigkeit – einen „Trend" fest:

$$1{,}1^{10} = \left(1 + \tfrac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}6 \quad 1{,}01^{100} = \left(1 + \tfrac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}70 \quad 1{,}001^{1\,000} = \left(1 + \tfrac{1}{1\,000}\right)^{1\,000} \approx 2{,}717$$

$$1{,}000\,1^{10\,000} = \left(1 + \tfrac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} \approx 2{,}718\,15 \quad 1{,}000\,01^{100\,000} = \left(1 + \tfrac{1}{100\,000}\right)^{100\,000} \approx 2{,}718\,27$$

John Napier nannte diese allen verwendeten Exponentialtafeln zugrunde liegende Zahl deren **natürliche Basis**. Im Englischen wird die später von Euler mit e bezeichnete Zahl deshalb auch **Napier's constant** genannt.

Stetige Verzinsung als mathematisches Modell

4.4 Die Idee, Geld gegen Zinsen zu verleihen, lässt sich bis in die frühen Hochkulturen zurückverfolgen. Im Louvre in Paris steht eine Tontafel aus Mesopotamien aus dem 17. Jh. v. Chr., auf der sinngemäß geschrieben steht:
„In welcher Zeit verdoppelt sich ein Geldbetrag, der zu jährlich 20 % Zinsen angelegt wird?"
Gib eine Formel für die Höhe des Gesamtkapitals (inklusive Zinsen) nach t Jahren an.

A

Für viele Wachstumsprozesse kann das vereinfachte Modell der Verzinsung von Kapital herangezogen werden. Es wird angenommen, dass ein Kapital K_0 zu einem Zinssatz von 100 % pro Jahr (p. a.) angelegt wird. Das gesamte Kapital kann während des Jahres behoben werden und hat sich dann um die bis dahin anfallenden Zinsen vermehrt.

Wird zum Beispiel ein Kapital K_0 angelegt, nach einem Vierteljahr inklusive Zinsen behoben und dieser Betrag K_1 neuerlich auf ein Sparbuch gelegt, ergibt sich bei vierteljährlichem Abheben und anschließendem Neu-Anlegen am Ende des 4. Quartals das Kapital K_4:

... nach dem 1. Quartal: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{1}{4} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)$

... nach dem 2. Quartal: $K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2$

... nach dem 3. Quartal: $K_3 = K_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3$

... nach dem 4. Quartal: $K_4 = K_3 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$

Allgemein würde bei n-maligem Abheben und wieder Einlegen des verzinsten Kapitals in Abständen von $\frac{1}{n}$-tel Jahren folgendes Endkapital erzielt werden:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Der Wert des Ausdrucks für $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wird nun für n = 1; 10; 100; 1 000 usw. berechnet (siehe Tab. 4.2).

Berechnet man mithilfe eines Taschenrechners die Ergebnisse, so sieht man, dass sich das Ergebnis mit immer größer werdendem n einer bestimmten Zahl nähert, die mit **e** bezeichnet und **Euler'sche Zahl** genannt wird. Man erhält:

e = 2,718 281 828 459 045 235 360 287 471 ... ≈ 2,718

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	$(1 + 1)^1 = 2$
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}593\,742\ ....$
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704\,813\ ....$
1 000	$\left(1 + \frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000} = 2{,}716\,923\ ....$
10 000	$\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = 2{,}718\,145\ ....$
100 000	$\left(1 + \frac{1}{100\,000}\right)^{100\,000} = 2{,}718\,268\ ....$

Tabelle 4.2

Mathematisch definiert wird die Zahl e durch folgenden Ausdruck:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die Abkürzung „lim" steht dabei für limes (latein: Grenze).

$\lim\limits_{n \to \infty}$ bedeutet in etwa, dass n „über jede Grenze hinaus" größer wird. Das Arbeiten mit so genannten Grenzwerten erfolgt erst in Band 3.

4.5 Ergänze die Tabelle 4.1 von Seite 80 und führe die folgenden Multiplikationen durch Addition der Exponenten aus.

a) 1,2 · 1,9 **b)** 1,3 · 1,6 · 3,8 **c)** 12 · 2,9 **d)** 1,6 · 6,2 **e)** 12 · 13

B

4.1.3 Eigenschaften der Exponentialfunktionen

Wie bei den bisher behandelten Funktionstypen werden nun auch bei den Exponentialfunktionen die Einflüsse verschiedener Konstanten auf die Eigenschaften und den Graphen der Funktion untersucht.

$y = a^x$

- Exponentialfunktionen sind für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ definiert.
- Die Funktionswerte sind immer positiv. Sie können jedoch beliebig klein werden, das heißt, die Funktionsgraphen nähern sich asymptotisch der x-Achse.
- Da $a^0 = 1$ ist, verlaufen alle Exponentialfunktionen durch den Punkt $P(0|1)$.
- Die Funktionen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ liegen symmetrisch zueinander bezüglich der y-Achse.
- Die Funktion $y = a^x$ ist streng monoton steigend für $a > 1$ bzw. streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

Bemerkung:
Ist $a > 1$ und der Exponent positiv, dann wächst die Funktion, das heißt, sie ist exponentiell steigend (exponentiell wachsend).
Ist $a > 1$ und der Exponent negativ oder $a < 1$, dann ist die Funktion exponentiell fallend.

$y = e^x$

Die Funktion $y = e^x$ nimmt unter den Exponentialfunktionen eine Sonderstellung ein. Sie ist durch die auf Seite 80 beschriebene Eigenschaft als „natürliche Basis" begründet. Außerdem hat die Funktion $y = e^x$ eine weitere wesentliche Eigenschaft, die wir mit den derzeit zur Verfügung stehenden mathematischen Kenntnissen nur geometrisch veranschaulichen können.

Meist wird die Exponentialfunktion $y = e^x$ kurz „e-Funktion" genannt.

- Die Funktion $y = e^x$ steigt rasch an.
- Für die Funktion $y = e^x$ ist die Gerade $y = x + 1$ die Tangente im Punkt $P(0|1)$. Es gilt stets: $e^x \geqslant x + 1$. Das heißt, die Funktion $y = e^x$ verläuft als einzige Exponentialfunktion immer „oberhalb" dieser Geraden.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

$y = a^{k \cdot x}$

In der nebenstehenden Abbildung ist der Einfluss des Faktors k im Exponenten für Funktionen mit der Basis 2 dargestellt.

Die Funktion **$y_1(x) = 2^x$** verläuft durch den Punkt $P_1(1|2)$. Betrachtet man die Funktion **$y_2(x) = 2^{2x}$**, so erkennt man, dass man den Funktionswert 2 schon durch Einsetzen von $x = 0{,}5$ erhält: $P_2(0{,}5|2)$. Die Funktion y_2 steigt also schneller an als y_1. Bei der Funktion **$y_3(x) = 2^{0{,}5x}$** erreicht man den Funktionswert 2 erst durch Einsetzen von $x = 2$: $P_3(2|2)$.
Diese Funktion steigt also langsamer an als y_1.

- Ist **$|k| > 1$**, erfolgt eine **Stauchung** der Funktion **in x-Richtung**.
- Ist **$|k| < 1$**, wird der Graph **in x-Richtung gestreckt**.
- Ist **$k < 0$**, wird die Funktion zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.

$y = c \cdot a^x$

Die Multiplikation einer Funktion mit einem Faktor c bewirkt eine Multiplikation jedes y-Werts mit diesem Faktor.

Zum Beispiel erhält man an der Stelle $x = 0$ für die Funktion **$y = e^x$** den Punkt $P_1(0|1)$, für **$y = 2 \cdot e^x$** den Punkt $P_2(0|2)$ bzw. für die Funktion **$y = -0{,}5 \cdot e^x$** den Punkt $P_3(0|-0{,}5)$.

- **$|c| > 1$** bewirkt eine **Streckung** der Funktion **in y-Richtung**.
- **$|c| < 1$** bewirkt eine **Stauchung in y-Richtung**.
- **$c < 0$**: Die Multiplikation mit einem negativen Faktor bewirkt eine **Spiegelung an der x-Achse**.

$y = a^x + d$

Wie bei allen bisher behandelten Funktionstypen führt die additive Konstante **d** zu einer **Verschiebung in positive** bzw. **negative y-Richtung**.

- Für $a > 1$ nähert sich die Exponentialfunktion für immer kleinere x-Werte der waagrechten Geraden $y = d$.
- Für $a < 1$ nähert sich die Exponentialfunktion für sehr große x-Werte der waagrechten Geraden $y = d$.

Die Gerade $y = d$ ist daher eine Asymptote der Funktion.

BCD **4.6** Von den Funktionen y_1, y_2 und y_3 sind die folgenden Wertetabellen gegeben:

A)

x	−1	0	2	3
y_1	−3	−1	3	5

B)

x	−1	0	2	3
y_2	2	1	0,25	0,125

C)

x	−1	0	2	3
y_3	6	2	0	2

1) Stelle die drei Funktionen grafisch dar. Gib an, um welchen Funktionstyp es sich dabei handeln könnte. Begründe deine Entscheidung.
2) Gib die Funktionsgleichungen der drei Funktionen an, unter der Annahme, dass es sich um eine lineare, eine quadratische Funktion und um eine Exponentialfunktion handelt.

BC **4.7** Wie ändert sich der Funktionswert von $y = 3^x$, wenn man
1) x um 3 vergrößert? **2)** x um 2 vermindert? **3)** x verdoppelt?

BC **4.8** Bei der Funktion $y = c \cdot a^x$ ändert sich der Funktionswert um den Faktor 1,025, wenn man x um zwei erhöht. Ermittle a.

BC **4.9** Gib an, für welche der gegebenen Funktionsgleichungen die jeweilige Aussage gilt.
1) Wird x um 2 vergrößert, ändert sich der Funktionswert um den Faktor 4.
2) Wird x um 1 vermindert, ändert sich der Funktionswert um den Faktor 3.
3) Wird x um 2 vergrößert, ändert sich der Funktionswert um den Faktor 9.
4) Wird x um 4 vergrößert, ändert sich der Funktionswert um den Faktor 2.
A) $y_1 = 4 \cdot 3^x$ **B)** $y_2 = 2 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$ **C)** $y_3 = 2 \cdot 0{,}25^{-0{,}5 \cdot x}$ **D)** $y_4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **E)** $y_5 = 4 \cdot 3^{x+2}$

D **4.10** Begründe mit eigenen Worten, um welchen Funktionstyp es sich jeweils handelt.
1) $y = 2x + 4$ **2)** $y = 3x^2 - 1$ **3)** $y = \frac{1}{x}$ **4)** $y = 3^x - 1$

D **4.11** Erkläre, wie sich die Basis a einer Exponentialfunktion der Form $y = a^x$ auf das exponentielle Verhalten auswirkt, wenn $a > 1$ bzw. $0 < a < 1$ ist.

C **4.12** Ergänze jeweils den fehlenden Text in den Aussagen.
1) $y = a^x + d$ mit $d < 0$ bewirkt gegenüber der Funktion $y = a^x$ eine ... in ... .
2) Ist $y = a^{k \cdot x}$ und $|k| > 1$, dann erfolgt eine ... der Funktion $y = a^x$ in ... .
3) Ist $a > 1$ in der Funktion $y = a^x$, dann ist die Funktion ... .
4) Ist $|c| < 1$ in der Funktion $y = c \cdot a^x$, dann wird diese gegenüber der Ausgangsfunktion $y = a^x$ in ...-Richtung ... .
5) Werden die x-Werte in der Funktion $y = a^x + d$ mit $a < 1$ immer kleiner, dann nähert sich die Exponentialfunktion ... .
6) Die Funktionen $y = e^{2x}$ und $y = e^{-2x}$ sind bezüglich der y-Achse ... .

BD **4.13** Erstelle für die Funktionen y_1 und y_2 eine Wertetabelle im Intervall [−3; 3] und zeichne die Funktionsgraphen in einem geeigneten Maßstab in ein gemeinsames Koordinatensystem. Beschreibe jeweils den Unterschied zwischen den beiden Funktionen.
a) $y_1 = 2^x$, $y_2 = 0{,}5^x$ **b)** $y_1 = 3^x$, $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **c)** $y_1 = 1{,}5^x$, $y_2 = 1{,}5^{-x}$ **d)** $y_1 = 0{,}8^x$, $y_2 = 0{,}8^{-x}$

Technologieeinsatz: Exponentialfunktionen

TI-Nspire

Die Exponentialfunktion e^x erreicht man mit der [e^x]-Taste. Die Euler'sche Zahl darf nicht mit dem Buchstaben „e" eingegeben werden, sondern mithilfe der Pi-Symbolpalette [π▸].

Die Euler'sche Zahl wird fett und kursiv angezeigt.

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

4.14 Stelle die Exponentialfunktionen grafisch dar. Vergleiche die Graphen und beschreibe die Unterschiede bzw. die Gemeinsamkeiten.

1) $y_1 = 0{,}5^x$ ***2)*** $y_2 = 2^x$ ***3)*** $y_3 = 3^x$ ***4)*** $y_4 = 2^{-x}$ ***5)*** $y_5 = e^x$

BC

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

Lösung:

- Die Funktionen werden in der Applikation **Graphs** der Reihe nach eingegeben (Aufruf der Eingabezeile mit [tab]). Die Darstellung erfolgt in unterschiedlichen Farben, die nachträglich geändert werden können. Ebenso kann die Linienstärke und der Linienstil unter **Attribute** geändert werden.

Die Funktionsgraphen von y_2, y_3 und y_5 sind streng monoton steigend, da die Basis a größer als 1 und der Exponent positiv ist. Die Funktionen steigen umso schneller, je größer die Basis ist. Die Funktionsgraphen von y_1 und y_4 fallen zusammen, da sie dieselbe Funktion darstellen. Sie sind streng monoton fallend.

4.15 Zeichne die Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem und beschreibe die Unterschiede zwischen den Funktionen.

a) $y_1 = 2^x$; $y_2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot x}$; $y_3 = 2^{\frac{1}{2} \cdot x} - 3$ ***b)*** $y_1 = 3^{-x}$; $y_2 = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x}$; $y_3 = \frac{1}{2} \cdot 3^{-x} + 1$; $y_4 = 3^{-x-2}$

BC

4.16 Zeichne die Funktion $y_1 = 1{,}2^x$ und die Funktion $y_2 = 1{,}44^{\frac{x}{2}}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

1) Erkläre, warum nur ein Funktionsgraph zu sehen ist.

2) Beweise mithilfe einer Rechnung, dass $y_1 = y_2$ ist.

BCD

4.17 ***1)*** Stelle die Exponentialfunktionen $y_1 = 1{,}8^x$, $y_2 = 10^x$ und $y_3 = e^x$ grafisch dar.

2) Zeichne den Graphen der linearen Funktion $y_4 = x + 1$.

3) Wie viele Schnittpunkte haben jeweils die Graphen von y_1, y_2 und y_3 mit dem Graphen von y_4?

BC

BCD **4.18** **1)** Stelle die beiden Funktionen in einem Koordinatensystem grafisch dar. Was fällt dir auf?
$y_1 = 2^x$, $y_2 = e^{0,693x}$
2) Gegeben sind die Funktionen $y_1 = 3^x$ und $y_2 = e^{ax}$. Versuche durch Probieren herauszufinden, welche Zahl für a eingesetzt werden muss, damit die Funktionsgraphen gleich sind. Begründe deine Wahl anschließend rechnerisch.

ACD **4.19** Ordne den Funktionsgraphen jeweils die richtige Funktion zu. Welche Funktion ist nicht dargestellt? Begründe deine Auswahl mit eigenen Worten.
a) $y_1 = 2^x$; $y_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; $y_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $y_4 = 3^x$; $y_5 = e^{-x}$
b) $y_1 = 2e^x$; $y_2 = e^{2x}$; $y_3 = 2 + e^x$; $y_4 = e^{-x}$; $y_5 = e^x + 1$
c) $y_1 = -e^{-x}$; $y_2 = e^{-x} + 1$; $y_3 = -e^x$; $y_4 = 1 - e^x$; $y_5 = e^x - 1$

A) **B)** **C)**

B **4.20** Skizziere die Funktion $y = 2 \cdot (1 - e^{-x})$, indem du mit einer Skizze der Funktion $y = e^x$ beginnst und jeden Änderungsschritt darstellst. Kennzeichne in der Funktion $y = e^x$ den Punkt P(1|e) und markiere den entsprechenden Punkt in jeder weiteren Skizze.

Lösung:
● $y = e^{-x}$ ● $y = -e^{-x}$ ● $y = 1 - e^{-x}$ ● $y = 2 \cdot (1 - e^{-x})$

B **4.21** Skizziere die gegebene Funktion, indem du mit einer Skizze der Funktion $y = e^x$ beginnst und jeden Änderungsschritt darstellst. Kennzeichne in der Funktion $y = e^x$ den Punkt P(1|e) und markiere den entsprechenden Punkt in jeder weiteren Skizze.
a) $y = e^{2x} - 1$ **b)** $y = 3 - e^{\frac{-x}{2}}$ **c)** $y = 4 \cdot (1 - e^x)$ **d)** $y = 2 \cdot (1 - e^{-3x})$

4.1.4 Anwendungen der Exponentialfunktion

Wachstumsvorgänge (exponentielles Wachstum)

Exponentielle Wachstumsvorgänge sind Vorgänge, die durch fortlaufende Multiplikation mit einem Faktor gekennzeichnet sind. Im Gegensatz zum gleichmäßigen Zuwachs des linearen Wachstums steigen bzw. wachsen die Funktionswerte bei exponentiellen Vorgängen zuerst langsam, dann zunehmend schneller.

Exponentielles Wachstum wird durch Funktionen der Form

$y = c \cdot a^{k \cdot x}$ $(c > 0, a > 1, k > 0)$ beschrieben.

Die Basis **a** wird als **Wachstumsfaktor** bezeichnet und entspricht dem Änderungsfaktor. Der Faktor k gibt das Ausmaß des Wachstums an. Je größer k ist, desto schneller wächst die Funktion.

Bei zeitabhängigen Vorgängen wird die unabhängige Variable meist mit t bezeichnet.

Wachstumsvorgänge können auch mit der Basis e angegeben werden: $y = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$ $(\lambda > 0)$

4.22 Ein Obstbaumbestand wird von Schädlingen befallen. Die Anzahl A der befallenen Bäume wächst annähernd exponentiell. Die Funktionsgleichung lautet:

$A(t) = 3 \cdot 1{,}2^t$ (t ... Anzahl der Tage nach dem Erstbefall)

ABC TE

1) Welche Bedeutung haben in diesem Zusammenhang die Werte 3 bzw. 1,2?
2) Um wie viel Prozent nimmt die Anzahl der betroffenen Bäume pro Tag zu?
3) Um welchen Faktor vergrößert sich die Anzahl der betroffenen Bäume in einer Woche?
4) Ermittle grafisch, wann mehr als 20 Bäume befallen sind.

Lösung:

1) 3 ist die Anzahl der zu Beginn der Beobachtung befallenen Bäume. 1,2 ist der Faktor, um den die Anzahl der befallenen Bäume pro Tag wächst.

- Zu Beginn der Beobachtung ist t = 0. $A(0) = 3 \cdot 1{,}2^0 = 3$
- $A(t) = 3 \cdot 1{,}2^t$
  $A(t+1) = 3 \cdot 1{,}2^{t+1} = 3 \cdot 1{,}2^t \cdot 1{,}2^1 = A(t) \cdot 1{,}2$

2) Die Multiplikation mit dem Faktor 1,2 entspricht einer Zunahme um 20 %.

- $1{,}2 \cdot A(t)$ ... 120 % von A(t)

3) $A(t+7) = A(t) \cdot 1{,}2^7 = A(t) \cdot 3{,}583...$
In einer Woche vergrößert sich die Anzahl der betroffenen Bäume rund um den Faktor 3,6.

- Beachte: Der Änderungsfaktor nach einer Woche ist für jede beliebige Woche derselbe.

4)

A
20
15
10
5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
t

Am 11. Tag sind erstmals mehr als 20 Bäume befallen.

AB **4.23** Ein schnell wachsendes Seetanggewächs ist am Beginn der Beobachtung 10 cm lang. Es wächst innerhalb von zwei Tagen um 6 %.
Erstelle eine Wertetabelle und gib eine Funktion der Form $y = c \cdot a^{k \cdot t}$ an, die die Länge y des Seetangs (in cm), abhängig von der Zeit t (in Tagen d), angibt.

Lösung:

$\frac{t}{\text{Tage}}$	$\frac{y}{\text{cm}}$
0	10,00
2	10,60
4	11,24
6	11,91
8	12,63

$y(0\,d) = 10\text{ cm}$
$y(2\,d) = 10\text{ cm} \cdot 1{,}06$
$y(4\,d) = 10\text{ cm} \cdot 1{,}06^2 \approx 11{,}24\text{ cm}$
$y(6\,d) = 10\text{ cm} \cdot 1{,}06^3 \approx 11{,}91\text{ cm}$
$y(8\,d) = 10\text{ cm} \cdot 1{,}06^4 \approx 12{,}63\text{ cm}$
$y(t) = 10\text{ cm} \cdot 1{,}06^{\frac{1}{2\,d} \cdot t}$

- Eine Vergrößerung um 6 % innerhalb von **zwei** Tagen entspricht einer Multiplikation mit 1,06 nach jeweils zwei Tagen. Der Exponent ist daher nur **halb so groß** wie die Anzahl der vergangenen Tage.

Die Funktionsgleichung lautet: $y = 10\text{ cm} \cdot 1{,}06^{\frac{1}{2\,d} \cdot t}$

Abklingvorgänge (Abnahmevorgänge, Zerfallsprozesse)

Nimmt eine Größe durch fortlaufende Multiplikation mit einem Faktor $0 < q < 1$ ab, so spricht man von einem Abklingvorgang. Die zugehörige Exponentialfunktion ist fallend und nähert sich asymptotisch einem Endwert.

Abklingvorgänge werden durch Funktionen der Form

$y = c \cdot q^x + d \;\; (c > 0, 0 < q < 1)$ bzw. $y = c \cdot a^{-k \cdot x} + d \;\; (c, k > 0, a > 1)$ beschrieben.

Sehr oft werden zeitabhängige Abklingvorgänge mit der Basis e angegeben:

$y(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$ bzw. $y(t) = c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \;\; \left(\lambda = \frac{1}{\tau} > 0, t \geq 0\right)$

τ wird als **Zeitkonstante** bezeichnet, die Einheit von τ ist eine Zeiteinheit.

Bei vielen Abnahmeprozessen ist jene Zeitspanne, in der sich eine Größe halbiert, von großer Bedeutung. Diese Zeitspanne wird als **Halbwertszeit** bezeichnet. Sie spielt auch in Anwendungen des alltäglichen Lebens eine wichtige Rolle, wie zum Beispiel beim radioaktiven Zerfall, Abbau von Koffein im Körper, … .

Grafische Bedeutung von λ bzw. τ für d = 0

y
c
0,37c
0
t
$t_1 = \tau$

- Legt man im Punkt P(0|c) die Tangente an die Kurve, so schneidet sie die t-Achse in $t_1 = \frac{1}{\lambda} = \tau$.
- Der Funktionswert an der Stelle τ beträgt rund 37 % des Ausgangswerts:
$y(\tau) = y\left(\frac{1}{\lambda}\right) = c \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = c \cdot e^{-1} \approx c \cdot 0{,}37$

4.24 In einem Raum mit 25 °C befindet sich eine Tasse Kaffee mit einer Temperatur von 85 °C. Die Abkühlung auf die Temperatur T erfolgt nach dem Abkühlungsgesetz von Newton:

$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-kt} + T_U$ T_0 ... Stofftemperatur, T_U ... Umgebungstemperatur

Die Temperaturänderung des Kaffees wird durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

$T(t) = 60\ °C \cdot e^{-0{,}04 \frac{1}{min} \cdot t} + 25\ °C$

1) Stelle die Temperaturfunktion im Bereich [0 min; 120 min] dar.
2) Welche Temperatur hat der Kaffee nach 5 Minuten bzw. nach einer Stunde?
3) Nach wie vielen Minuten hat der Kaffee eine Trinktemperatur von 55 °C erreicht?
4) Argumentiere, welche Temperatur der Kaffee nach langer Zeit annimmt.

ABCD

TI-Nspire, Mathcad: www.verlaghpt.at

Lösung mit GeoGebra:

1)

- Soll die Anzeige der Funktion auf das Intervall [a; b] eingeschränkt werden, so kann dies mit dem Befehl **Funktion[f(x), a, b]** erreicht werden. Die Variable muss dabei x sein.
- e^x = **exp(x)**

2) Nach fünf Minuten hat der Kaffee eine Temperatur von ungefähr 74 °C, nach einer Stunde ungefähr 30 °C.

3)

- Der Funktionsgraph muss mit der Geraden T = 55 °C geschnitten werden. Dazu wird die zweite Funktion eingegeben: **T55: y=55**
- Anschließend wird der Schnittpunkt bestimmt.

Nach rund 17 Minuten ist der Kaffee auf 55 °C abgekühlt.

4) Erhöht man den Bereich für die Zeit t, so erkennt man aus der grafischen Darstellung, dass sich die Kurve der waagrechten Asymptote bei 25 °C, also der Raumtemperatur, nähert.

ABC TE

4.25 Radioaktive Isotope zerfallen annähernd nach dem Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$N(t)$ ... Anzahl der zum Zeitpunkt t vorhandenen Atomkerne

N_0 ... Anzahl der Atomkerne zu Beginn der Beobachtung

$\lambda > 0$ ... Zerfallskonstante

Das radioaktive Arsen 73 zerfällt nach dem folgenden Zerfallsgesetz:

$N(t) = 10^{20} \cdot e^{-\frac{0{,}008\,6}{d} \cdot t}$ (t ... Zeit in Tagen d)

1) Wie viele Atomkerne von Arsen 73 sind nach 200 Tagen noch vorhanden?

2) Stelle den Graphen der Funktion dar und lies aus der Zeichnung ab, nach wie vielen Tagen die Hälfte der Atomkerne zerfallen ist.

Lösung:

1) $N(200\,d) = 10^{20} \cdot e^{-\frac{0{,}008\,6}{d} \cdot 200\,d} \approx 1{,}79 \cdot 10^{19}$

Nach 200 Tagen sind noch ca. $1{,}79 \cdot 10^{19}$ Kerne vorhanden.

2) $\frac{1}{2} \cdot N_0 = \frac{1}{2} \cdot 10^{20} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{19} = 5 \cdot 10^{19}$

Nach ca. 80 Tagen ist die Hälfte der Atomkerne zerfallen.

Sättigungsvorgänge

Nähert sich eine wachsende Größe – im Gegensatz zum bisher behandelten exponentiellen Wachstum – einem konstanten Endwert, so spricht man von einem Sättigungsvorgang. Dieser Endwert wird dabei theoretisch nie erreicht und entspricht der Asymptote , der sich die Funktion nähert. Bei einem „normalen" Sättigungsvorgang wächst die Größe zuerst schnell und dann immer langsamer (zB. Erwärmung eines Getränks auf Umgebungstemperatur). Ebenfalls als Sättigungsvorgang bezeichnet wird das sogenannte logistische Wachstum, das auf Seite 92 näher behandelt wird und Wachstum bei beschränkten Ressourcen (zB. Vermehrung von Fischen in einem Fischteich) beschreibt.

exponentielles Wachstum

Sättigungsvorgang

logistisches Wachstum

Sättigungsvorgänge werden durch Funktionen der Form

$y = c \cdot (1 - a^{-kx})$ bzw. $y = c \cdot (1 - e^{-\lambda x})$

beschrieben. Die waagrechte Gerade $y = c$ ist Asymptote der Funktion.

Sättigungsvorgänge sind in der Praxis oft zeitabhängig und werden meist in der Form:

$y(t) = c \cdot (1 - e^{-\lambda t})$ bzw. $y(t) = c \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ $(\lambda = \frac{1}{\tau}, t \geq 0)$ angegeben.

4.26 Der Einschub eines Motorradstoßdämpfers kann durch die Funktion $s(t) = 25\ \text{cm} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0{,}6\ \text{s}}})$ beschrieben werden.

BC

1) Ermittle den Einschub für t = 1,2 s.

2) Stelle die Funktion grafisch dar und lies aus der Zeichnung ab, nach welcher Zeit ein Einschub von 18,5 cm erreicht ist.

Lösung:

1) $s(1{,}2\ \text{s}) = 25\ \text{cm} \cdot (1 - e^{-\frac{1{,}2\ \text{s}}{0{,}6\ \text{s}}}) =$
$= 25\ \text{cm} \cdot (1 - e^{-2}) = 21{,}61...\ \text{cm} \approx 21{,}6\ \text{cm}$

2) s(t) = 18,5 cm bei t ≈ 0,8 s.

4.27 In einem Stromkreis mit einem Ohm'schen Widerstand R = 200 Ω und einem Kondensator mit der Kapazität C = 5 µF wird ein Gleichstrom mit einer Spannung U_0 = 100 V zum Zeitpunkt t = 0 s eingeschaltet. Die Aufladung des Kondensators erfolgt nach folgender Gleichung:

BC

$u_c(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ mit $\tau = R \cdot C$ (Zeitkonstante)

1) Stelle den Verlauf von u_c grafisch dar. Welchem Endwert nähert sich u_c asymptotisch?

2) Gib u_c für t = 1 ms und t = 5 ms in Volt und in Prozent des Endwerts an.

3) Lies aus der Zeichnung ab, wann 95 % des Endwerts erreicht sind.

Lösung:

$\tau = R \cdot C = 200\ \Omega \cdot 5\ \mu\text{F} =$
$= 200 \cdot \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = 1\,000 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 1\ \text{ms}$

$u_c(t) = 100\ \text{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{1\ \text{ms}}})$ t ... Zeit in Millisekunden

- Zusammenhänge zwischen den Einheiten: $1\ \Omega = \frac{1\ \text{V}}{1\ \text{A}}$ $1\ \text{F} = \frac{1\ \text{A} \cdot 1\ \text{s}}{1\ \text{V}}$
- Maßstab zB: 1 ms ... 1 cm; 20 V ... 1 cm

1)

$\frac{t}{\text{ms}}$	$\frac{u_c}{\text{V}}$
0	0
1	63,2
2	86,5
3	95,0
4	98,2

u_c nähert sich dem Wert 100 V asymptotisch.

2) $u_c(1\ \text{ms}) \approx 63{,}2\ \text{V} \mathrel{\hat{=}} 63{,}2\ \%$ von U_0
$u_c(5\ \text{ms}) \approx 99{,}3\ \text{V} \mathrel{\hat{=}} 99{,}3\ \%$ von U_0

3) $u_c(t) = 95\ \text{V}$ bei t ≈ 3 ms
95 % des Endwerts sind nach 3 ms erreicht.

Logistisches Wachstum

Eine besondere Form eines exponentiellen Wachstumsvorgangs, die meist als Modell für Populationswachstum eingesetzt wird, ist das **logistische Wachstum**. Es beschreibt exponentielles Wachstum, das durch eine begrenzte Ressource eingeschränkt wird. Bei der Ressource kann es sich zum Beispiel um die Kapazität eines Lebensraums oder die Menge an Nahrung handeln. Logistisches Wachstum beschreibt also „gebremstes" exponentielles Wachstum.

Logistische Wachstumsvorgänge werden beschrieben durch Funktionen der Form:

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-\lambda t}}$$

$y(t)$ ... Anzahl zum Zeitpunkt t
y_0 ... Anzahl zu Beginn
K ... Kapazität, begrenzte Ressource, Kapazitätsgrenze

BC **4.28** Das Wachstum von Fruchtfliegen (Drosophila melanogaster) lässt sich nach Raymond Pearl (amerikanischer Biologe und Statistiker, 1879 – 1940) durch folgende Formel beschreiben:

$$y(t) = \frac{1\,035 \cdot y_0}{y_0 + (1\,035 - y_0) \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t}}$$

$y(t)$ ... Anzahl der Fliegen nach t Tagen

1) Stelle die Funktion für $y_0 = 20$ Fliegen grafisch dar. Gib einen Wert an, den die Anzahl der Fliegen nicht überschreiten kann. Begründe deine Vermutung anhand der Grafik.
2) Nach wie vielen Tagen beträgt die Anzahl der Fliegen mehr als 1 030?

Lösung:

1) Kapazitätsgrenze bei K = 1 035. Man sieht, dass die Funktion sich diesem Wert asymptotisch nähert. Dieser Wert wird daher theoretisch nie erreicht bzw. überschritten.

2) Die Fliegenanzahl beträgt nach ca. 46 Tagen mehr als 1 030 Fliegen.

Aperiodische Schwingungsvorgänge

Wird zum Beispiel ein schwingungsfähiges System durch Reibung so stark gedämpft, dass es nicht mehr schwingt, sondern sich asymptotisch einer Gleichgewichtslage nähert, spricht man von einem aperiodischen Schwingungsvorgang. Auf die unterschiedlichen Arten von aperiodischen Schwingungsvorgängen wird in Band 4 näher eingegangen.

Aperiodische Schwingungsvorgänge können durch Exponentialfunktionen der Form

$y = a \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} + b \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t}$ bzw. $y = (a + b \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschrieben werden.

4.29 Gib an, welcher Text mithilfe eines linearen exponentiellen Zusammenhangs beschrieben werden kann. C
1) Thomas gibt jede Woche 5,00 € in sein Sparschwein.
2) Die Oberfläche eines Pilzes wächst täglich um das 1,5-fache an.
3) Merve legt auf ein Sparbuch 500,00 € zu einem Zinssatz von 2,4 % p. a. auf drei Jahre an.
4) In einem Schwimmbad werden jeden Tag 18 Liter Desinfektionslösung verbraucht.

4.30 Ordne jeder Funktionsgleichung die passende Wachstumsform zu: C
A) lineares Wachstum, **B)** exponentielles Wachstum, **C)** lineare Abnahme oder **D)** exponentielle Abnahme
1) $y(x) = 5 \cdot 1{,}03^x$ **2)** $y(x) = 80 - 5x$ **3)** $y(x) = 4 \cdot 0{,}82^x$ **4)** $y(x) = -65 + 4x$

4.31 Erkläre, welchem Wert sich die Funktionswerte nähern, wenn x D
1) immer größere Werte, **2)** immer kleinere Werte, annimmt.
A) $y_1 = 3^x$ **B)** $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **C)** $y_3 = 2 \cdot e^{-4 \cdot x}$ **D)** $y_4 = e^{-x} + 4$

4.32 Der Funktionswert der Funktion $y(x) = a^x$ ändert sich um den angegebenen Prozentsatz, wenn x um 1 vergrößert wird. Ermittle a, wenn der Funktionswert BC
a) um 15 % wächst. **b)** um 7 % fällt. **c)** um 100 % wächst. **d)** um 50 % fällt.

4.33 Die Anzahl der Bakterien in einer exponentiell wachsenden Bakterienkultur verdoppelt sich in zwei Tagen. Gib an, um welchen Faktor sich die Anzahl innerhalb des angegebenen Zeitraums vergrößert. AB
a) 1 Tag **b)** 3 Tage **c)** 1 Woche **d)** 12 Stunden

4.34 Eine Firma expandiert und strebt eine deutliche Umsatzsteigerung in den nächsten Jahren an. Gib die Funktion an, die das jährliche Wachstum beschreibt. A
a) Verdoppelung in 5 Jahren **b)** Verdreifachung in 10 Jahren

4.35 Ordne jedem Graphen die passende Funktionsgleichung zu und gib jeweils an, um welchen exponentiellen Vorgang es sich handelt. AC
1) $y = (2 + 3 \cdot x) \cdot e^{-2x}$ **2)** $y = \frac{8}{2 + 2 \cdot e^{-x}}$ **3)** $y = 3 \cdot (1 - e^{-2x})$

A)

B)

C)

4.36 Argumentiere, durch welchen Punkt die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ für $t = 0$ verläuft. D

4.37 Argumentiere, warum für einen exponentiellen Sättigungsvorgang $y = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$ gilt: $y(0) = 0$ D
Erkläre, warum sich diese Funktion für große t der konstanten Funktion $y = c$ nähert.

4.38 Zeige, dass die Tangente an die Funktion $y = 2 \cdot (1 - e^{-3t})$ im Punkt $t = 0$ die Asymptote in $t_1 = \frac{1}{3}$ schneidet. Ermittle auch, wie viel Prozent des Endwerts der Funktionswert an dieser Stelle beträgt. BD

TE

Exponential- und Logarithmusfunktionen

ABC **4.39** Eine Bakterienpopulation verdoppelt sich alle fünf Minuten. Um 13:00 Uhr sind es bereits 1 000 Bakterien. Gib ohne TE-Einsatz an, wann die Bakterienanzahl 500 betrug.

C **4.40** Die nebenstehende Grafik beschreibt die Abkühlung eines Getränks. Lies aus der Grafik ab:

1) Welche Temperatur hatte das Getränk zu Beginn?

2) Nach wieviel Minuten ist die Temperatur auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken?

3) Welche Temperatur hat das Getränk nach langer Zeit?

ABC **4.41** Im Verlauf eines Experiments wird die Temperatur beginnend bei 5 °C um 9:00 Uhr so erhöht, dass sie pro Stunde um 7 % steigt.

1) Gib die Temperatur T als Funktion $T(t) = c \cdot a^t$ in der Zeit ab 9:00 Uhr an, wobei t die Zeit in Stunden ab 9:00 Uhr ist.

2) Ermittle anhand einer Zeichnung, wann die Temperatur 12 °C übersteigen würde.

ABC **4.42** In einer Süßspeise befinden sich 200 Salmonellen. Sie vermehren sich exponentiell. Nach drei Stunden beträgt ihre Anzahl bereits 64 000.

1) Gib die Funktion an, die die Salmonellenanzahl in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) beschreibt.

2) Stelle den Verlauf grafisch dar und lies aus der Zeichnung ab, wann die Anzahl der Salmonellen 100 000 übersteigt.

ABC **4.43** Germ (Hefe) vermehrt sein Volumen in einer warmen Umgebung durch Gärung exponentiell. Nach einer Stunde hat sich das ursprüngliche Volumen von 2 cm^3 verdreifacht.

1) Gib die Funktion an, die das Volumen, abhängig von der Zeit t (in Stunden), beschreibt.

2) Stelle die Funktion grafisch dar und ermittle, nach welcher Zeit ein Volumen von 5 cm^3 erreicht ist.

ABC **4.44** Indien hatte im Jahr 2011 ca. 1,21 Milliarden Einwohner, die jährliche Wachstumsrate beträgt 1,4 %.

1) Gib eine Funktion zur Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung in Indien an und stelle die Entwicklung bis 2050 grafisch dar.

2) Wann würde die Bevölkerung Indiens bei gleich bleibender Zuwachsrate die 2-Milliarden-Grenze überschreiten?

C **4.45** Die Funktionsgleichung $x(t) = 8 \cdot 3^{\frac{t}{4\,h}}$ beschreibt die Anzahl von Personen, die eine Neuigkeit kennen. Ergänze die im Text fehlenden Angaben mithilfe der gegebenen Funktionsgleichung:
Eine Neuigkeit ist ursprünglich ... Personen bekannt. Alle ... Minuten ver...facht sich die Anzahl der Personen, die von der Neuigkeit wissen.

C **4.46** Ergänze die im Text fehlenden Angaben mithilfe der gegebenen Funktionsgleichung:
$I(x) = I_0 \cdot 0{,}95^{\frac{x}{50\,cm}}$, x ... Dicke des Mediums
Die Lichtintensität I nimmt im Vergleich zur Anfangsintensität I_0 pro ... Meter um ... Prozent ab.

4.47 Für medizinische Untersuchungen kann radioaktives Jod 131 verwendet werden. Aufgrund des radioaktiven Zerfalls sind nach vier Tagen von 1 mg noch 0,75 mg vorhanden.

ABC

1) Gib die Funktion an, die den Zerfall einer Anfangsmenge von N_0 nach der Zeit t (in Tagen) beschreibt.
2) Stelle die Funktion für eine Ausgangsmenge von 5 mg grafisch dar.
3) Ermittle die Halbwertszeit von Jod 131.
4) Wie viel Prozent sind nach drei Tagen und nach einer Woche zerfallen?
5) Wie lang dauert es, bis von einer Menge von 5 mg nur mehr 1 mg vorhanden ist?

4.48 Am 26. April 1986 explodierte in Tschernobyl (Ukraine) ein Block des Atomkraftwerks. Dabei wurden unter anderem große Mengen an Cäsium 137 freigesetzt. In einem Jahr zerfallen nur rund 0,28 % der Cäsiumkerne.

ABC TE

1) Gib die Funktion an, die den Zerfall von Cäsium beschreibt, und stelle sie für eine Ausgangsmenge von 100 g grafisch dar.
2) Welche Masse war von ursprünglich 100 g Cäsium im April 2012 noch vorhanden?
3) Wie viel Prozent zerfallen in 20 Jahren?
4) Wie lang dauert es, bis nur noch die Hälfte der Ausgangsmasse vorhanden ist?

4.49 In klarem Wasser nimmt die Intensität des Lichts um ca. 11 % pro Meter ab.

ABC TE

1) Auf wie viel Prozent des Ausgangswerts ist die Lichtintensität in 10 m Tiefe gesunken?
2) Gib die Funktion an, die die Lichtintensität, abhängig von der Tiefe (in Meter), beschreibt und stelle sie grafisch dar.
3) Nach wie viel Meter ist die Lichtintensität um ein Viertel der ursprünglichen gefallen?

4.50 Das Vergessen von auswendig gelernten sinnlosen Silben kann durch die Vergessenskurve nach Ebbinghaus beschrieben werden:

ABC TE

$p(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0{,}07\frac{1}{d}\cdot t}$

p(t) gibt den Prozentsatz der Silben an, den die Versuchsperson nach t (in Tagen) noch im Gedächtnis hat.

1) Zeichne den Funktionsgraphen im Bereich [0 Tage; 100 Tage].
2) Wie viel Prozent der Silben hat die Versuchsperson nach
a) 2 Tagen ***b)*** 5 Wochen noch im Gedächtnis?
3) Nach wie vielen Tagen hat die Versuchsperson 30 % der Silben vergessen?
4) Wie viel Prozent der Silben vergisst eine Person (theoretisch) nie?

4.51 Radioaktive Strahlung verliert beim Durchdringen einer Stahlplatte pro Millimeter rund 5 % an Intensität I.

AB

1) Wie viel Prozent der ursprünglichen Strahlung durchdringen eine Platte mit 1 cm Dicke?
2) Wie viel Prozent der ursprünglichen Strahlung werden von einer 2 cm dicken Platte abgehalten?

4.52 Die Bewegung eines Körpers, der sich aus der Gleichgewichtslage entfernt, einen Umkehrpunkt erreicht und anschließend in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, wird durch die folgende Funktion beschrieben:

BC TE

$y(t) = 5\,\text{m} \cdot e^{-\frac{4}{s}\cdot t} - 5\,\text{m} \cdot e^{-\frac{6}{s}\cdot t}$ (y ... Abstand von der Gleichgewichtslage, t in Sekunden)

Stelle die Funktion grafisch dar und lies den Umkehrzeitpunkt ab.

AB **4.53** Beim Einschalten eines elektrischen Geräts zum Zeitpunkt t = 0 s steigt die Stromstärke i (in Ampere A), abhängig von der Zeit t (in Sekunden), an. Die Stromstärke kann durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$i(t) = 2\,A \cdot (1 - 1{,}6^{-\frac{1}{s} \cdot t})$

1) Ermittle die momentane Stromstärke i nach 3 Sekunden bzw. nach 7 Sekunden.
2) Stelle die Funktion für t = 0 s bis 9 s grafisch dar.
3) Gib an, nach wie viel Sekunden die Stromstärke 1,28 A beträgt.

AB **4.54** Die Chefin einer Firma gibt eine Anweisung, die alle ihrer 2 000 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter erhalten sollen, an einen Sekretär weiter. Die Anzahl der informierten Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$A(t) = \frac{a \cdot K}{a + (K - a) \cdot e^{-K \cdot \lambda \cdot t}}$

a ... Anzahl zu Beginn, K ... Gesamtanzahl der Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen

1) Stelle die Anzahl der Informierten grafisch dar, wenn $\lambda = 0{,}000\,5\,\frac{1}{d}$ ist.
2) Wie viele Angestellte sind nach 5 Tagen bzw. 2 Wochen informiert?
3) Wie lang dauert es, bis 100 bzw. 1 000 oder 1 500 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter informiert sind?
4) Gib an, um welche Form des Wachstums es sich bei der Funktion handelt.

AB **4.55** Von 2 000 Passagieren auf einem Schiff infizierte sich eine Person mit einem ansteckenden Darmvirus und steckt weitere Personen an. Die Anzahl der Infizierten kann mithilfe des logistischen Wachstums beschrieben werden.
1) Stelle die Funktionsgleichung auf, wenn $\lambda = 1{,}312\,\frac{1}{d}$ ist.
2) Gib an, wann die Hälfte der Passagiere erkrankt wäre, wenn keine Quarantänemaßnahmen ergriffen worden wären.

AB **4.56** In zähflüssigem Maschinenöl wird eine an einer Feder hängende Masse aus der Ruhelage bewegt und zum Zeitpunkt t = 0 s losgelassen. Die Bewegung wird durch folgende Funktion beschrieben:

$x(t) = (320\,\frac{cm}{s} \cdot t + 20\,cm) \cdot e^{-\frac{16}{s} \cdot t}$, x ... Abstand von der Ruhelage

1) Stelle die Funktion für $0\,s \leqslant t \leqslant 0{,}4\,s$ grafisch dar.
2) Wie weit wurde die Masse zu Beginn aus der Ruhelage bewegt?
3) Nach welcher Zeit hat sie nur mehr 10 % des maximalen Abstands von der Ruhelage?

ABC **4.57** Im Jahr 1950 betrug die Weltbevölkerung 2,1 Milliarden Menschen. Das Bevölkerungswachstum kann durch eine Exponentialfunktion ausreichend gut angenähert werden.
1) Erhebe, wie groß die Weltbevölkerung derzeit ist und stelle eine Funktion auf, die das Wachstum seit 1950 beschreibt.
2) Ermittle mithilfe der in ***1)*** ermittelten Näherungsfunktion, wann die Weltbevölkerung die 8 Milliardengrenze überschritten haben wird, wenn das Wachstum in dieser Weise anhält. Vergleiche die so ermittelten Zahlen mit den offiziellen Schätzungen.

4.2 Logarithmus

4.2.1 Grundbegriffe

4.58 Ein Blatt Zeitungspapier wird durch die Klasse gereicht und dabei von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler einmal in der Mitte gefaltet. Nach dem ersten Falten liegen also zwei Lagen Papier aufeinander, nach dem zweiten Mal vier Lagen, nach dem dritten Falten bereits acht usw.

1) Durch welche Funktion lässt sich die Anzahl y der Papierlagen angeben, wenn die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die gefaltet haben, mit x bezeichnet wird? Gib die Gleichung an.

2) Wie viele Lagen liegen nach dem 5. Falten aufeinander? Schreibe die Rechnung mithilfe der in ***1)*** angegebenen Funktion an.

3) Überlege, nach dem wie vielten Mal Falten 128 Schichten Papier aufeinanderliegen? Für welche Variable in der Funktionsgleichung ist nun ein Wert gegeben? Welche Variable soll berechnet werden?

Besteht zwischen drei Größen der Zusammenhang $y = b^x$ ($b, y > 0$), kann bei Angabe von zwei dieser Größen die jeweils dritte berechnet werden, zum Beispiel:

- $b = 5$, $x = 2$ führt auf die Gleichung $y = 5^2$.
  Wir berechnen den fehlenden Wert für y durch **Potenzieren** und erhalten $y = 25$.
- $y = 25$, $x = 2$ führt auf die Gleichung $25 = b^2$.
  Wir berechnen den fehlenden Wert für b durch **Wurzelziehen** und erhalten $b = \sqrt[2]{25} = 5$.
- $y = 25$, $b = 5$ führt auf die Gleichung $25 = 5^x$.
  Die gesuchte Hochzahl x kann durch Überlegen gefunden werden, sie lautet $x = 2$. Jedoch eignet sich keiner der bisherigen Rechenvorgänge allgemein zur Ermittlung des gesuchten Exponenten x. Wählt man zum Beispiel für $y = 11$, so kann eine geeignete Zahl x mit $5^x = 11$ nicht mehr durch bloßes Probieren gefunden werden. Man kann die Gleichung zunächst grafisch lösen, indem man $y = 5^x$ darstellt und den gesuchten Wert aus der Zeichnung abliest.
  Der Wert $y = 25$ wird bei $x = 2$ angenommen.
  Der Wert $y = 11$ wird bei $x \approx 1{,}5$ angenommen.

Um den exakten Wert zu berechnen, braucht man neue Definitionen und entsprechende Rechenregeln.

Das Ermitteln des Exponenten nennt man **Logarithmieren**.

Sind in der Gleichung $b^x = y$ die Basis b und die Potenz y bekannt, so nennt man den geeigneten Exponenten x den **Logarithmus** (Mehrzahl: Logarithmen) von y zur Basis b. y wird als **Numerus** bezeichnet.

Exponentialfunktionen $y = b^x$ sind nur für $b > 0$ definiert, der Numerus y ist daher immer positiv.

$\mathbf{b^x = y \iff x = \log_b(y)}$ ($b > 0, b \neq 1, y > 0$) [Sprich: „x ist der Logarithmus von y zur Basis b"]

Für jede Basis b ($b > 0, b \neq 1$) gilt:

$\log_b(b) = 1$, da $b^1 = b$ $\qquad$ $\log_b(1) = 0$, da $b^0 = 1$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Man kann das Berechnen einer Potenz $b^x = y$ also auf zwei verschiedene Arten umkehren:

Potenzieren (Berechnung der Potenz y)

$\mathbf{b^x = y}$

$5^2 = 25$

Wurzelziehen
Berechnung der Basis b

$\mathbf{b = \sqrt[x]{y}}$

$5 = \sqrt[2]{25}$

Logarithmieren
Berechnung des Exponenten x

$\mathbf{x = \log_b(y)}$

$2 = \log_5(25)$

Jeder logarithmische Zusammenhang $x = \log_b(y)$ kann als exponentieller Zusammenhang der Form $y = b^x$ angeschrieben werden (und umgekehrt).
ZB: $x = \log_3(9) \Leftrightarrow 3^x = 9$, also $x = 2$
Umgangssprachlich formuliert entspricht $\log_3(9) = ?$ der Frage: „3 hoch wie viel ist 9?"

Merke: **Logarithmen sind Hochzahlen**.

Der Zahlenwert eines Logarithmus ist im Allgemeinen eine irrationale Zahl und kann nur in Ausnahmefällen exakt angegeben werden.

Für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Basen sind eigene Bezeichnungen und Abkürzungen gebräuchlich:

Basis	Bezeichnung	Schreibweise	Taschenrechner
10	Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus, logarithmus generalis)	lg(y)	LOG
e	natürlicher Logarithmus (logarithmus naturalis)	ln(y)	LN
2	Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus)	lb(y)	–

Für Logarithmen mit anderen Basen als 10 oder e stehen am Taschenrechner oft keine Tasten bzw. keine Befehle zur Verfügung. Deren Berechnung wird dann auf Logarithmen zur Basis 10 oder natürliche Logarithmen zurückgeführt.

$$x = \log_b(y)$$
$$b^x = y$$
$$(10^{\lg(b)})^x = 10^{\lg(y)}$$
$$10^{x \cdot \lg(b)} = 10^{\lg(y)}$$
$$x \cdot \lg(b) = \lg(y)$$
$$x = \frac{\lg(y)}{\lg(b)}$$

- Aus der Definition des Logarithmus folgt unmittelbar: $b = 10^{\lg(b)}$, $y = 10^{\lg(y)}$
- Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ anwenden
- $10^a = 10^b \Rightarrow a = b$

Die hier angeführten Rechenschritte hätten auch mit der Basis e (anstelle von 10) ausgeführt werden können, also gilt auch $x = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$.

Logarithmen mit beliebiger Basis b können mithilfe von dekadischen oder natürlichen Logarithmen berechnet werden:

$$x = \log_b(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(b)} = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$$

Im Speziellen gilt: $\lg(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$ bzw. $\ln(a) = \frac{\lg(a)}{\lg(e)}$

Im Allgemeinen gilt: $\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(y)}$

4.59 Schreibe den Ausdruck als Potenz an und ermittle x im Kopf. B

a) $x = \log_2(16)$ **b)** $x = \log_{10}(0{,}1)$ **c)** $x = \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ **d)** $x = \log_4(2)$ **e)** $x = \log_a(a^2)$

Lösung:

a) $x = \log_2(16) \Leftrightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4$, da $2^4 = 16$

b) $x = \log_{10}(0{,}1) \Leftrightarrow 10^x = 0{,}1 \Rightarrow x = -1$, da $10^{-1} = 0{,}1$

c) $x = \log_5\left(\frac{1}{25}\right) \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{25} \Rightarrow x = -2$, da $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

d) $x = \log_4(2) \Leftrightarrow 4^x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, da $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

e) $x = \log_a(a^2) \Leftrightarrow a^x = a^2 \Rightarrow x = 2$

Aufgaben 4.60 – 4.64: Gib den Ausdruck als Potenz an und ermittle jeweils den Logarithmus im Kopf.

4.60 **a)** $\log_7(49)$ **b)** $\log_8(0{,}125)$ **c)** $\log_{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)$ **d)** $\log_{0,2}(0{,}04)$ **e)** $\log_{11}(\sqrt{11})$ AB

4.61 **a)** $\lg(1\,000)$ **b)** $\lg(0{,}0001)$ **c)** $\lg\left(\frac{1}{10\,000}\right)$ **d)** $\lg(\sqrt{0{,}001})$ **e)** $\lg\left(\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\right)$ AB

4.62 **a)** $\ln(e)$ **b)** $\ln(e^2)$ **c)** $\ln(e^{-1})$ **d)** $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ **e)** $\ln(\sqrt[3]{e})$ AB

4.63 **a)** $\text{lb}(16)$ **b)** $\text{lb}\left(\frac{1}{8}\right)$ **c)** $\text{lb}(\sqrt[3]{2})$ **d)** $\text{lb}(0{,}125)$ **e)** $\text{lb}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\right)$ AB

4.64 **a)** $\log_b(b^5)$ **b)** $\lg(1)$ **c)** $\lg(10)$ **d)** $\lg(10^2)$ **e)** $\log_b(\sqrt{b})$ AB

4.65 Schreibe die Gleichung jeweils mithilfe eines Logarithmus an. A

1) $3^x = 27$ **2)** $2^x = \frac{1}{4}$ **3)** m ist der Logarithmus von r zur Basis k

4.66 Gib an, welche der Gleichungen den Ausdruck $\log_5(0{,}04) = x$ beschreibt. C

A) $0{,}04^5 = x$ B) $0{,}04^x = 5$ C) $5^x = 0{,}04$ D) $5^{0,04} = x$

4.67 Erkläre, welche der Berechnungen richtig bzw. falsch sind. D

A) $\ln(e^a) = e$ B) $\log_{\sqrt{6}}(36) = 4$ C) $\text{lb}(1\,024) = 10$ D) $\log_5(\sqrt{5}) = -0{,}5$

4.68 Erkläre, welcher Rechenvorgang zur Berechnung von x verwendet werden muss und ermittle x. BD

a) $\log_4(x) = 3$ **b)** $\log_x\left(\frac{1}{729}\right) = 8$ **c)** $\log_{0,5}\left(\frac{1}{64}\right) = x$ **d)** $\log_{\sqrt{2}}(x) = 8$

4.69 Zeige, dass die folgenden Behauptungen richtig sind. D

1) $\log_b(x) = 2 \Rightarrow \log_b(x^2) = 4$

2) $\log_b(x) = a \Rightarrow \log_{b^2}(x) = \frac{a}{2}$

3) $\log_b(x) = a \Rightarrow \log_b(\sqrt{x}) = \frac{a}{2}$

4) $\log_{\sqrt{b}}(x) = a \Rightarrow \log_{b^2}(x) = \frac{a}{4}$

TE

Technologieeinsatz: Logarithmus

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

TI-Nspire

1.1 *Nicht gespeicherte

ln(e) 1

$\log_2(0.25)$ -2.

$\log_{\square}(100)$

$\log_{10}(100)$ 2

Natürlicher Logarithmus ln(y): ctrl + ln e^x

Logarithmus zu bestimmter Basis $\log_b(y)$:

ctrl + log 10^x oder **log(y,b)**

Wird keine Basis eingegeben, so wird der Zehnerlogarithmus ausgegeben.

AB **4.70** Gib den Ausdruck mithilfe von
1) dekadischen und ***2)*** natürlichen Logarithmen an. Überprüfe deine Umformung mithilfe von Technologieeinsatz.

TE

a) $\log_7(10)$ ***b)*** $\log_4(23)$ ***c)*** lb(5) ***d)*** lg(0,3) ***e)*** ln(100)

4.2.2 Rechenregeln für Logarithmen

Da Logarithmen Hochzahlen sind, gelten für sie auch die für das Rechnen mit Potenzen hergeleiteten Rechenregeln. Sie werden jedoch in diesem Zusammenhang in anderer Schreibweise angegeben, zB:

Potenzschreibweise:
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Logarithmenschreibweise:
$x = a^n \;\Rightarrow\; \log_a(x) = n;\;\; y = a^m \;\Rightarrow\; \log_a(y) = m$
$x \cdot y = a^{n+m} \;\Rightarrow\; \log_a(x \cdot y) = n + m$
Daher gilt: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Analoge Überlegungen für $a^n : a^m$ und $(a^n)^m$ führen auf die weiteren Rechenregeln für Logarithmen.

Rechenregeln für Logarithmen

Logarithmus eines **Produkts** = Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Logarithmus eines **Quotienten** = Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ bzw. $\log_a(x : y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Logarithmus einer **Potenz** = Hochzahl mal Logarithmus der Basis
$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

Gelten Umformungen für jede Basis, so wird oft die Angabe der Basis beim Schreiben weggelassen. Beachte jedoch, dass es immer die gleiche Basis sein muss.

Merke: Beim Zerlegen von Logarithmen werden die Rechenoperationen um eine Stufe herabgesetzt, beim Zusammenfassen von gleichartigen Logarithmen werden sie um eine Stufe erhöht.

Logarithmen von Summen und Differenzen können daher NICHT weiter zerlegt werden.

4.71 Zerlege $\log\left(\left(\frac{5x}{ay^3}\right)^2 \cdot \sqrt{7z^3}\right)$ soweit wie möglich in eine Summe bzw. Differenz von Einzellogarithmen. B

Lösung:

$$\log\left(\left(\frac{5x}{ay^3}\right)^2 \cdot \sqrt{7z^3}\right) = \log\left(\frac{5x}{ay^3}\right)^2 + \log(\sqrt{7z^3}) = 2 \cdot \log\left(\frac{5x}{ay^3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log(7z^3) =$$

$$= 2 \cdot (\log(5) + \log(x) - (\log(a) - 3 \cdot \log(y))) + \frac{1}{2} \cdot (\log(7) + 3 \cdot \log(z)) =$$

$$= 2 \cdot \log(5) + 2 \cdot \log(x) - 2 \cdot \log(a) - 6 \cdot \log(y) + \frac{1}{2} \cdot \log(7) + \frac{3}{2} \cdot \log(z)$$

4.72 Zerlege soweit wie möglich in eine Summe bzw. Differenz von Einzellogarithmen. Gib an, welche Rechenregeln du verwendest. BC

a) $\ln(4a^3)$ **c)** $\log(x^3 \cdot y \cdot z^2)$ **e)** $\ln(\sqrt[3]{a^2 \cdot b})$ **g)** $\log\left(\frac{x^3 \cdot z}{y^2}\right)$

b) $\log(x^2 - y^2)$ **d)** $\ln\left(a \cdot \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}\right)$ **f)** $\log\left(\sqrt[5]{x^4} \cdot \frac{a^2}{4b^3 \cdot c^5}\right)$ **h)** $\log\left(\frac{3s \cdot t^5}{5xz} \cdot \sqrt{\frac{m^3 \cdot n}{3a - 3b}}\right)$

4.73 Begründe mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen, welche Fehler in den folgenden Umformungen gemacht wurden. D

1) $\log(a^2 + b) = 2 \cdot \log(a) + \log(b)$ **3)** $\ln\left(\frac{x^2}{y \cdot z^3}\right) = 2 \cdot \ln(x) - \ln(y) + 3 \cdot \ln(z)$

2) $\ln(\sqrt[3]{a^4 + b^3}) = \frac{4}{3} \cdot \ln(a) + \ln(b)$ **4)** $\log\left(\frac{3x^4 \cdot y}{z^3 \cdot a}\right) = 4 \cdot \log(3x) + \log(y) - 3 \cdot \log(z) + \log(a)$

4.74 Fasse $\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \lg(a) + 5 \cdot \lg(b) - \lg(c)) + 2$ zum Logarithmus eines einzigen Terms zusammen. B

Lösung:

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \lg(a) + 5 \cdot \lg(b) - \lg(c)) + 2 = \frac{1}{2} \cdot (\lg(a^3) + \lg(b^5) - \lg(c)) + \lg(100) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lg\left(\frac{a^3 \cdot b^5}{c}\right) + \lg(100) = \lg\left(\sqrt{\frac{a^3 \cdot b^5}{c}} \cdot 100\right)$$

4.75 Fasse jeweils zum Logarithmus eines einzigen Terms zusammen. Vereinfache die Terme soweit wie möglich. B

a) $\log(3) + \log(a) + \log(b)$ **d)** $2 \cdot \ln(a) + \ln(b)$ **g)** $\ln(2) + \ln(x) - \ln(y)$

b) $3 \cdot \ln(x) - \ln(2x)$ **e)** $\log(x^2 - 1) - \log(x + 1)$ **h)** $\lg(x^2 + 5x + 6) - 2 \cdot \lg(x + 2)$

c) $\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \log(a) - \log(b))$ **f)** $\frac{1}{3} \cdot (\lg(a + b) + 2 \cdot \lg(a - b)) - \frac{1}{4} \cdot (2 + \lg(a) - \lg(b))$

4.76 Zeige, dass die folgenden Umformungen richtig sind. Welche Rechenregel wurde angewendet? BD

1) $\log(243) = 5 \cdot \log(3)$ **2)** $\ln(9) = \ln(3) + \ln(3)$ **3)** $\ln(0{,}5) = -\ln(2)$

4.77 Erkläre jeweils mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen, welcher Fehler gemacht wurde. D

1) $\log(3) - \frac{1}{3} \cdot \log(x) + 4 \cdot \log(y) = \log\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x} \cdot y^4}\right)$

2) $\frac{1}{5} \cdot [\ln(x) + 3\ln(y) - \ln(z + b)] = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{x \cdot y^3}{z \cdot b}}\right)$

4.3 Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

4.3.1 Exponentialgleichungen

AB **4.78** Wenn du eine österreichische 1-Euro-Münze wirfst, sind zwei verschiedene Ergebnisse möglich: Die obere Seite zeigt Mozart (M) oder Zahl (Z). Bei zwei Würfen sind es schon vier Möglichkeiten: MM, MZ, ZM, ZZ. Nach wievielen Würfen sind es 64 Möglichkeiten?

Viele Fragestellungen führen auf Terme, die Potenzen enthalten. Formuliert man mit solchen Termen eine Gleichung, kann die gesuchte Variable im Exponenten auftreten.

Eine Gleichung, bei der die Gleichungsvariable im Exponenten eines Potenzterms steht, heißt **Exponentialgleichung**.

Exponentialgleichungen können im Allgemeinen nur grafisch oder numerisch gelöst werden, das heißt, die Lösung kann nur bis auf eine gewisse Genauigkeit ermittelt werden.
Die analytische Lösung, das heißt, Lösen durch geeignetes Umformen, ist einfachen Sonderfällen vorbehalten. Anhand von Beispielen werden die unterschiedlichen Lösungswege aufgezeigt.

ZB:

$3^{x-1} = 2^x$

$\ln(3^{x-1}) = \ln(2^x)$

- **Gesamte** linke und **gesamte** rechte Seite logarithmieren
- Die Basis des Logarithmus kann theoretisch frei gewählt werden. Meist verwendet man ln oder lg. Ist die Basis e oder 10, sollte der passende Logarithmus verwendet werden.

$(x-1)\cdot\ln(3) = x\cdot\ln(2)$

- Anwenden des Rechengesetzes $\log(a^n) = n\cdot\log(a)$

$x\cdot\ln(3) - \ln(3) = x\cdot\ln(2)$

- Gleichung wie gewohnt umformen

$x\cdot\ln(3) - x\cdot\ln(2) = \ln(3)$

$x\cdot(\ln(3) - \ln(2)) = \ln(3)$

$x = \frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)} = 2{,}709... \approx 2{,}71$

$L = \{2{,}71\}$

In besonderen Fällen kann die Lösung ohne Hilfe von Logarithmen berechnet werden:

- Gleiche Basis:
  ZB: $2^{3x} = 2^{x+2} \Rightarrow 3x = x + 2$
  $2x = 2$
  $x = 1$
  $L = \{1\}$
  - $n \neq m \Leftrightarrow 2^n \neq 2^m$, daher folgt aus $2^n = 2^m$, dass gilt: $n = m$

- Gleicher Exponent:
  ZB: $3^{x+1} = 2^{x+1} \Rightarrow x + 1 = 0$
  $x = -1$
  $L = \{-1\}$
  - Für $n \neq 0$ gilt: $3^n \neq 2^n$, da jedoch $a^0 = 1$ für alle $a \neq 0$ gilt, ist auch $3^0 = 2^0$.

4.79 Ermittle die Lösung der Exponentialgleichung. B

$5 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 7 \cdot 3^{x-1}$

Lösung

$$5 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 7 \cdot 3^{x-1}$$
$$2^x \cdot (5 - 2) = 7 \cdot 3^{x-1}$$
$$2^x \cdot 3 = 7 \cdot 3^{x-1} \quad |:3$$
$$2^x = 7 \cdot 3^{x-2} \quad |\ \ln \ldots$$
$$\ln(2^x) = \ln(7 \cdot 3^{x-2})$$
$$x \cdot \ln(2) = \ln(7) + (x - 2) \cdot \ln(3)$$
$$x \cdot \ln(2) = \ln(7) + x \cdot \ln(3) - 2 \cdot \ln(3)$$
$$x \cdot \ln(2) - x \cdot \ln(3) = \ln(7) - 2 \cdot \ln(3)$$
$$x \cdot (\ln(2) - \ln(3)) = \ln(7) - 2 \cdot \ln(3)$$
$$x = \frac{\ln(7) - 2 \cdot \ln(3)}{\ln(2) - \ln(3)} = 0{,}619\ldots \approx 0{,}62 \qquad L = \{0{,}62\}$$

- Der Logarithmus einer Summe kann nicht zerlegt werden, daher muss VOR dem Logarithmieren durch Herausheben auf ein Produkt umgeformt werden.
- Rechenregeln für Logarithmen anwenden

4.80 Löse die Gleichung $5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 6$ mithilfe einer geeigneten Substitution. B

Lösung:

$$5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 6 \quad |\cdot 2^x$$
$$5 + 2^{2x} = 6 \cdot 2^x$$
$$5 + u^2 = 6u$$
$$u^2 - 6u + 5 = 0$$
$$u_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm 2$$
$$u_1 = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \qquad u_2 = 1 \Rightarrow 2^x = 1$$
$$x \cdot \ln(2) = \ln(5) \qquad x \cdot \ln(2) = \ln(1)$$
$$x_1 = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2{,}32 \qquad x_2 = \frac{\ln(1)}{\ln(2)} = 0 \qquad L = \{0; 2{,}32\}$$

- Die Gleichung wird so erweitert, dass keine negativen Hochzahlen mehr auftreten.
- Substitution: $2^x = u \Rightarrow 2^{2x} = (2^x)^2 = u^2$
- Rücksubstitution

Aufgaben 4.81 – 4.82: Ermittle die Lösungen der Gleichungen ohne Technologieeinsatz.

4.81 **a)** $2^x \cdot 2^{x-1} = 16$ **b)** $3^{2x} \cdot 3^x = 81$ **c)** $2^x \cdot 4^x - 64 = 0$ **d)** $3^x \cdot 9^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 0$ B

4.82 **a)** $5^{x+1} - 5^x = 4^{x+1}$ **b)** $2^{4x} = 4^{3x-1}$ **c)** $3^{x+5} = \frac{1}{\sqrt{27}}$ **d)** $2^{x+3} + 2^x = 3^{x+2}$ B

Aufgaben 4.83 – 4.85: Ermittle die Lösungen der Gleichungen und dokumentiere deine Rechenschritte.

4.83 **a)** $5^x = 17$ **b)** $3^3 - 2^x = 0$ **c)** $3 \cdot 0{,}5^x = 11$ **d)** $2^{3x} - 2 \cdot 5^3 = 0$ BC

4.84 **a)** $2^{3x-4} = 45{,}3$ **b)** $e^{4x} = 17$ **c)** $7^{1-x} = 3{,}6$ **d)** $e^{-0{,}5x} = 10$ BC

4.85 **a)** $e^x + e^{x+1} = 2{,}8$ **b)** $2^{2x+1} + 4^x - 6{,}1 = 0$ **c)** $5^{1-x} - 0{,}2^x = 3{,}7$ **d)** $e^{\frac{x}{2}} + 3 \cdot \sqrt{e^x} = 0{,}8$ BC

4.86 Löse die Gleichung mithilfe einer geeigneten Substitution. BA

a) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 550$ **b)** $3^{1-x} - 7 = 2 \cdot 3^{x+1}$ **c)** $e^x + e^{-x} = 5$ **d)** $4 \cdot e^{-x} + 3 \cdot e^x - 8 = 0$

4.87 Beschreibe mit eigenen Worten, wie die angegebenen Exponentialgleichungen jeweils gelöst werden können und dokumentiere die Rechenschritte. BCD

1) $2^{x+3} = 4^4$ **2)** $3^{2x+1} = 3^{-1} \cdot 5^{2x+2}$ **3)** $4^{3x+1} = 6 \cdot 2^{x-2}$

4.88 Ermittle rechnerisch den Schnittpunkt der Funktion $f(x) = e^{2x+2} - e^{x-1}$ mit der x-Achse. BA

BD **4.89** Erkläre, welche der Umformungen falsch sind, und stelle sie richtig.

A) $3 \cdot 5^x = 375 \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow x = 3$

B) $4 \cdot 2^x - 3 = 5 \Rightarrow 4 \cdot 2^x = 8 \Rightarrow 8^x = 8 \Rightarrow x = 1$

C) $2 \cdot 3^x = 6 \Rightarrow 6^x = 6 \Rightarrow x = 1$

D) $5^{2x} = 2 \Rightarrow 10^{2x \cdot \lg(5)} = 10^2 \Rightarrow x = \frac{2}{\lg(25)}$

CD **4.90** Überprüfe die Richtigkeit der Aussagen und begründe deine Antwort.

1) Von einer Exponentialgleichung spricht man, wenn die gesuchte Variable im Exponenten auftritt.

2) Die Lösung der Gleichung $e^{2x} = 3$ ist $x = 2 \cdot \ln(3)$.

3) Jede Exponentialgleichung kann mithilfe eines Exponentenvergleichs gelöst werden.

4) $f(x) = 4^{-x}$ beschreibt dieselbe Funktion wie $g(x) = e^{-2x \cdot \ln(2)}$.

Aufgaben 4.91 – 4.94: Drücke jeweils die angegebene Variable aus.

B **4.91** **a)** $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad t = ?$ **b)** $3 \cdot e^{\frac{x}{z}} = 2 \quad x = ?$ **c)** $a \cdot e^{\frac{z}{x}} + b = 1 \quad z = ?$

B **4.92** **a)** $m = n - a \cdot e^{-b \cdot t} \quad t = ?$ **b)** $\frac{w_1}{w_2} = 1 + e^{\frac{t}{t+1}} \quad t = ?$ **c)** $s = 1 + \sqrt{a - e^{\frac{t}{b}}} \quad t = ?$

B **4.93** **a)** $\frac{w}{y} = a^{\frac{\lambda}{\lambda - 1}} \quad \lambda = ?$ **b)** $(a + b^{-\omega t}) \cdot s = V \quad t = ?$ **c)** $\frac{r^x + 1}{r^x - 1} = \frac{r^a}{r^b} \quad x = ?$

B **4.94** **a)** $\frac{t_1}{t_1 - t_2} = \sqrt[s]{t} \quad s = ?$ **b)** $10^{\frac{r_a - r_b}{2}} = \frac{u}{2} \quad r_a = ?$ **c)** $B = \frac{r \cdot t}{a} \cdot (e^{2x} + e^{3y}) \quad x = ?$

B **4.95** Löse die Gleichung. **1)** $e^x + e^{x+1} = 1$ **2)** $e^x + x = 1$

TE

GeoGebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

Lösung mit TI-Nspire:

1) 1.1 *Nicht gespeicherte

solve$(e^x + e^{x+1} = 1, x)$ $x = -\ln(e+1)$

- Um einen genauen Wert zu erhalten, wird der Berechnungsmodus auf **Exakt** eingestellt und die Gleichung mit **solve** gelöst.

2) solve$(e^x + x = 1, x)$ $e^x + x = 1$

solve$(e^x + x = 1, x)$ $x = 0.$

- Erfolgt das Lösen mit dem solve-Befehl, so erhält man keine Lösung, da diese Gleichung nicht durch Logarithmieren lösbar ist. Im Berechnungsmodus **Auto** erhält man die Lösung $x = 0$.

Grafische Lösung:

1.1 1.2 *Nicht gespeicherte

$f1(x) = e^x + x$

$(0, 1)$ $f2(x) = 1$

- Steht keine numerische Lösungsmethode zur Verfügung, so kann eine Gleichung grafisch gelöst werden. Dazu wird zum Beispiel der Schnittpunkt der Funktionen $f_1(x) = e^x + x$ und $f_2(x) = 1$ ermittelt.

B **4.96** Löse die Gleichung grafisch.

a) $2x + 3^x = 5$ **b)** $2e^x + x = 0$ **c)** $8 + 3x = 4^x$

TE

4.97 Ein Bakterienstamm aus 500 Bakterien vermehrt sich exponentiell in fünf Stunden auf 512 000 Bakterien.

AB

1) Ermittle, um welchen Faktor die Bakterienanzahl stündlich zunimmt.
2) Gib an, nach welcher Zeit sich die Bakterienanzahl verdreifacht hat.

Lösung:

1) $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$
$512\,000 = 500 \cdot e^{5\lambda} \quad |:500$
$1\,024 = e^{5\lambda}$
$\ln(1\,024) = 5 \cdot \lambda \quad |:5$
$\lambda = \frac{\ln(1\,024)}{5} = 1{,}386\,294...$
$e^{\lambda} = e^{1{,}386\,294...} = 4$

- Aufstellen der Wachstumsfunktion mit t ... Anzahl in Stunden
- Berechnung von λ
- Berechnung des Faktors

Die Bakterienzahl wächst stündlich um das Vierfache.

2) $3 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{1{,}386\,294... \cdot t} \quad |:N_0$
$3 = e^{1{,}386\,294... \cdot t}$
$\ln(3) = 1{,}386\,294... \cdot t$
$t = 0{,}792...$

- Ermittlung der Verdopplungszeit
- Logarithmieren

Die Verdopplungszeit beträgt rund 48 Minuten.

4.98 Der Holzbestand eines Walds wächst annähernd exponentiell. Vom Frühling 2008 bis zum Frühling 2011 ist er (ohne Abholzung) von 4 500 m^3 auf 6 950 m^3 angewachsen.

ABC

1) Gib an, um wie viel Prozent der Baumbestand jährlich wächst.
2) In welchem Jahr wird der Bestand (ohne Schlägerung) auf 9 500 m^3 angewachsen sein?
3) Wann wird diese Menge erreicht sein, wenn zu Beginn des Jahres 2012 der Bestand durch Abholzung um 5 % reduziert wird?
4) Wann würde der Baumbestand 9 500 m^3 erreichen, wenn statt eines exponentiellen Wachstums ein lineares Wachstum angenommen wird?

4.99 Herr Müller hat sich vorgenommen abzunehmen. Er möchte sein Körpergewicht wöchentlich um 1 % reduzieren. Zu Beginn der Diät hat er 95 kg.

ABC

1) Gib eine Funktion an, die die Masse von Herrn Müller, abhängig von der vergangenen Zeit t (in Wochen), angibt, falls sein Vorhaben gelingt.
2) Berechne die Masse, die die Waage nach 8 Wochen anzeigt.
3) Stelle die Funktion grafisch dar. Ermittle grafisch und rechnerisch, nach wie vielen Wochen er sein Ziel von 85 kg erreicht hat.

4.100 In einem Badeteich wurde eine Verunreinigung durch das zum Beispiel in Waschmitteln enthaltene 4-Nonylphenol festgestellt. Eine Messung ergab eine Konzentration von 245 ppm der Chemikalie. Da die Verunreinigung des Teichs über 25 ppm betrug wurde ein Badeverbot verhängt. Durch natürliche Abbauvorgänge sinkt die Konzentration pro Tag um 15 %.

ABC

1) Berechne die Höhe der Konzentration (in ppm) nach einer Woche.
2) Stelle die Funktion grafisch dar. Ermittle grafisch und rechnerisch, nach wie vielen Tagen das Badeverbot aufgehoben werden kann.

ABD **4.101** Eine Hasenpopulation vermehrt sich annähernd exponentiell und ist nach 50 Tagen auf 56 Tiere angewachsen.

1) Gib die exponentielle Wachstumsfunktion für die Vermehrung der Hasen an, wenn zu Beginn 20 Tiere vorhanden waren.
2) Nach wie vielen Tagen beträgt die Anzahl der Hasen mehr als 430, wenn das Wachstum gleich bleibt?
3) Wie lang dauert es, bis sich die Ausgangsanzahl vervierfacht hat?
4) Erkläre, in welchem Zeitabschnitt dieses Modell der Realität annähernd entspricht.

AB **4.102** Zur Untersuchung der Schilddrüse wird radioaktives Technetium 99 verwendet. Es hat eine Halbwertszeit von sechs Stunden.

1) Gib eine Funktion an, die die Abnahme dieses Isotops im Körper beschreibt.
2) Zu Beginn der Untersuchung wird einem Patienten eine Dosis von 14 mSv (Millisievert) injiziert. Wie viel Prozent der Anfangsdosis sind nach einem Tag noch im Körper vorhanden?
3) Nach welcher Zeit sind nur mehr 3 % der ursprünglichen Dosis vorhanden?

BC **4.103** Wird ein Kapital verzinst, so gilt: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$
(K_n ... Kapital nach n Jahren, K_0 ... Ausgangskapital, i ... jährlicher Zinssatz in %).

1) Berechne, wie lang es dauert, bis ein Kapital von 300,00 € bei einem jährlichen Zinssatz von i = 2 % auf einen Betrag von 6 000,00 € angewachsen wäre (ohne Berücksichtigung der KESt).
2) Ermittle, zu welchem Zinssatz i ein Kapital von 230,00 € auf 15 Jahre angelegt werden müsste, damit man am Ende der Laufzeit über einen Betrag von rund 4 400,00 € verfügen kann. Interpretiere das Ergebnis.

AB **4.104** In den EU-Staaten geht man von einer jährlichen Wachstumsrate der Bevölkerung von 0,27 % aus. Alle der EU angehörenden Staaten haben insgesamt eine Bevölkerung von ca. 0,5 Milliarden Menschen (Stand 2008). Die Türkei hat rund 76 Millionen Einwohner, die Wachstumsrate beträgt 2,4 %.
Welche jährliche Wachstumsrate hätte die Bevölkerung der EU, wenn die Türkei EU-Mitglied wäre?

ABC TE **4.105** Tierpopulationen, wie zum Beispiel Fische in einem Fischteich, vermehren sich nicht exponentiell, sondern nach dem Modell des logistischen Wachstums, da die Kapazität des Lebensraums beschränkt ist. Ihre Anzahl F wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$F(t) = \frac{500 \cdot F_0}{F_0 + \frac{500 - F_0}{2{,}3^t}}$$

mit F_0 ... Anfangsanzahl,
t ... Zeit in Wochen

1) Wie viele Fische befinden sich nach 3 Wochen im Teich, wenn es am Beginn 20 waren?
2) Nach 5 Wochen waren in einem anderen, gleich großen Teich 325 Fische. Wie viele Fische sind in diesem Teich nach insgesamt 8 Wochen zu erwarten?
3) Stelle die Funktion F für $F_0 = 50$ Fische grafisch dar. Wie lang dauert es theoretisch, bis die Kapazitätsgrenze von 500 Fischen erreicht ist? Gilt diese Überlegung auch in der Realität?

4.3.2 Logarithmische Gleichungen

4.106 Bei einer Digitalkamera wird – vereinfacht ausgedrückt – die Lichtempfindlichkeit des Aufnahmevorgangs durch den ISO-Wert beschrieben, zum Beispiel ISO 200/24°, meist kurz ISO 200 geschrieben. Dieser Wert entspricht der Lichtempfindlichkeit von Filmen, für deren Angabe früher zwei verschiedene Normen in Gebrauch waren: DIN (deutsche Norm) und ASA (amerikanische Norm). ISO 200/24° steht für 200 ASA = 24 DIN, wobei folgender Zusammenhang gilt: AB

$x = 21° + 10° \cdot \lg\left(\frac{y}{100}\right)$ x ... Lichtempfindlichkeit in DIN, y ... Lichtempfindlichkeit in ASA

1) Ermittle die DIN-Zahlen für 100, 200, 400, 800 und 1 600 ASA.

2) Gib eine Formel an, mit der man aus einer gegebenen DIN-Zahl die ASA-Zahl ermitteln kann.

Eine Gleichung, deren Gleichungsvariable im Argument eines Logarithmus auftritt, nennt man **logarithmische Gleichung**. Da Logarithmen nur für positive Werte definiert sind, ist die Definitionsmenge der Gleichung entsprechend zu bestimmen.

Auch logarithmische Gleichungen können im Allgemeinen nur grafisch oder numerisch gelöst werden. Die analytische Lösung, das heißt, durch geeignete Umformungen, ist einfachen Sonderfällen vorbehalten, wie anhand eines Beispiels gezeigt werden soll.

ZB: $\lg(x + 7) = 1 + \lg(x - 2)$

$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

- Ermitteln der Definitionsmenge: Da der Logarithmus nur für positive Werte definiert ist, muss der Numerus jeweils größer Null sein. Beide Bedingungen sind durch $x > 2$ erfüllt.

$D = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

Lösen der Gleichung:

$\lg(x + 7) = 1 + \lg(x - 2)$

$\lg(x + 7) = \lg(10) + \lg(x - 2)$ — Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen

$\lg(x + 7) = \lg[10 \cdot (x - 2)]$

$10^{\lg(x + 7)} = 10^{\lg(10x - 20)}$ — $10^{\lg(a)} = a$

$x + 7 = 10x - 20$ — Berechnen der Lösung

$x = 3$ $L = \{3\}$ — Da 3 in der Definitionsmenge enthalten ist, ist 3 die Lösung der Gleichung.

Aufgaben 4.107 – 4.112: Löse die logarithmischen Gleichungen durch geeignete Umformungen.

4.107 ***a)*** $\lg(x) = 5$ ***b)*** $\ln(x) = -2$ ***c)*** $\lg(x) - 4 = -2$ ***d)*** $3 - \ln(x) = 0$ B

4.108 ***a)*** $2 \cdot \lg(x + 1) = 5$ ***b)*** $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0{,}8$ ***c)*** $0{,}5 \cdot \ln(3 - x) = 1{,}2$ ***d)*** $3{,}4 \cdot \ln(2x - 1) = 5{,}8$ B

4.109 ***a)*** $\lg(x) = 2 \cdot \lg(x - 2)$ ***b)*** $1 + \lg(x) = \lg(2x)$ ***c)*** $\ln(x) = \ln(x + 5) - 5$ B

4.110 ***a)*** $2 \cdot \lg(x) - \lg(x - 1) = 3$ ***b)*** $\lg(x + 6) - \lg(x - 3) = 1$ ***c)*** $\ln(x + 1) + \ln(x - 1) = 2{,}5$ B

4.111 ***a)*** $\ln(x + 1) + \ln(x + 2) = \ln(x - 1) + \ln(x + 7)$ ***b)*** $\lg(x - 5) + \lg(x + 4) = 2 \cdot \lg(x + 1)$ B

4.112 ***a)*** $\lg(x - 5) + 0{,}698\,97 = 2 + \lg(2x - 4)$ ***b)*** $\ln(3x + 5) - \ln(2x + 1) = 3 - \ln(x)$ B

Aufgaben 4.113 – 4.114: Löse die logarithmischen Gleichungen.

B **4.113** **a)** $(\lg(x))^2 - \lg(x^{12}) - 20 = 0$ **b)** $\ln^2(x) - \ln(x^7) = -12$ **c)** $\lg^2(x) - 2 \cdot \lg(x) = \lg(x^3) + 10$
Hinweis: $\ln^2(x) = (\ln(x))^2$

B **4.114** **a)** $x^{\lg(x)} = 10$ **b)** $2^{\lg(x)} = 4$ **c)** $x^{\ln(x)} = x$ **d)** $2x^{\ln(x)} = 8{,}3$

D **4.115** Begründe, welche Aussagen richtig und welche falsch sind und stelle sie gegebenenfalls richtig.
1) Beim Lösen von Logarithmusgleichungen muss keine Definitionsmenge bestimmt werden, da die Lösungen immer reelle Zahlen darstellen.
2) Logarithmusgleichungen sind immer analytisch lösbar.
3) Als Logarithmusgleichung bezeichnet man eine Gleichung, bei der die gesuchte Variable im Numerus eines Logarithmus vorkommt.
4) Eine logarithmische Gleichung kann immer durch Potenzieren gelöst werden.

Aufgaben: 4.116 – 4.118: Drücke jeweils die angegebene Variable aus.

B **4.116** **a)** $T = 20 \cdot \lg\left(\frac{z}{z_0}\right)$ $z = ?$ **b)** $\ln\left(\frac{s}{t}\right) + a = t^2$ $s = ?$ **c)** $1 + \lg(a) = 2 + \lg(b)$ $a = ?$

B **4.117** **a)** $\frac{r}{s \cdot \ln(b \cdot t)} = C^2$ $t = ?$ **b)** $\lambda_1 = a \cdot \sqrt{s \cdot \ln\left(\frac{w}{w_1}\right)}$ $w = ?$ **c)** $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \sqrt{\frac{\lg(x)}{\lg(x) - \lg(x_0)}}$ $x = ?$

B **4.118** **a)** $\Delta T = 1 - \frac{a_1}{a_2} \cdot \ln(t + 1)$ $t = ?$ **c)** $2a \cdot (1 - r) \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) = V_1 - V_2$ $x = ?$
b) $C - b = 2 - 2 \cdot \lg(s)$ $s = ?$

ABD **4.119** Das Gesetz von Weber-Fechner besagt, dass Sinneseindrücke mit dem Logarithmus der Reizstärke wachsen. Wird die Reizstärke also mit einem konstanten Faktor mehrmals multipliziert, so erhöht sich die Sinnesempfindung jeweils um die gleiche additive Größe.
Den Effektivwert (Mittelwert) der Druckschwankungen, die in der Luft bei der Ausbreitung von Schall entstehen, nennt man Schalldruck p. Er wird in Pascal gemessen. Die Hörschwelle liegt bei $p_0 = 20$ µPa. Bei der praktischen Schallmessung wird der Schalldruckpegel L_p verwendet:

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \text{ dB} \quad (\text{dB ... Dezibel})$$

p	L_p in dB	Beispiel
$p_0 = 20$ µPa	0	Hörschwelle
...	10	Blätterrascheln
$10 \cdot p_0$	...	Flüstern
$20 \cdot p_0$	...	Normale Sprache
...	80	Verkehrslärm, 5 m vom Straßenrand
$10^5 \cdot p_0$	...	Disco, 1 m Entfernung vom Lautsprecher
...	130	Schmerzschwelle

1) Ermittle die fehlenden Tabellenwerte.
2) Gib an, um wie viel der Schalldruckpegel zunimmt, wenn der Schalldruck verdoppelt wird.

AB **4.120** Eine Maschine erzeugt einen Schalldruck von 1,5 Pascal.
1) Berechne den Schalldruckpegel (siehe Aufgabe 4.119).
2) Durch den Einbau einer zusätzlichen Dämpfung sinkt der Schalldruck um 10 %. Um wie viel verringert sich dadurch der Schalldruckpegel?
3) Um wie viel Prozent müsste der Schalldruck reduziert werden, um den Schalldruckpegel um 10 dB zu senken?

4.121 Eine Größe in der Akustik ist der Schallintensitätspegel L, der als Verhältnis der Schallintensität I zur Schallintensität $I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$ angegeben wird. Er ist definiert als $L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ dB und wird in Dezibel (dB) angegeben.

ABC

TE

GeoGebra, TI-Nspire: www.verlaghpt.at

a) 20 dB entsprechen einem leisen Flüstern. Wie groß ist die Schallintensität?

b) Ein Motorrad erzeugt in 7,5 Meter Entfernung einen Schallpegel von 100 dB. Erkläre, ob man 15 Motorräder 15-mal lauter hört als ein Motorrad. Hinweis: Es dürfen nur die Intensitäten vervielfacht werden.

Lösung mit Mathcad:

a) $I_0 := 10^{-12}$

$I := 20 = 10\cdot\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ auflösen $\rightarrow \frac{1}{10000000000}$ $\qquad I = 1 \times 10^{-10}$ W/m2

b) $L_1 = 10\cdot\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 100 \qquad L_{15} = 10\cdot\log\left(15\cdot\frac{I}{I_0}\right) = 10\cdot\log(15) + 10\cdot\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$L_{15} := 10\cdot\log(15) + 100 \qquad L_{15} = 111.761$

15 Motorräder erzeugen einen Schallpegel von rund 112 dB, sind also nicht 15-mal lauter als ein Motorrad mit einem Schallpegel von 100 dB.

4.122 Der amerikanische Physiker Frank Benford (1883 – 1948) entdeckte, dass bei zufällig ausgewählten oder anfallenden Daten die Anfangsziffern nicht gleichmäßig verteilt sind, sondern gilt:

ABC

$$p(n) = \lg(n + 1) - \lg(n)$$

n ... 0, 1, ..., 9

p(n) ... Wahrscheinlichkeit, dass ein Datensatz mit der Ziffer n beginnt

Mithilfe dieses nach ihm benannten Gesetzes lassen sich zum Beispiel Bilanzfälschungen aufdecken.

1) Ermittle für einen möglichst langen Kassabon aus dem Supermarkt jeweils die Anzahl der Beträge, die mit der Ziffer 1, 2, ... 9 beginnen.

2) Erstelle eine Wertetabelle für p(n)

3) Was ist von einer Bilanz zu halten, in der 11 % aller Datensätze mit der Ziffer 9 beginnen?

4.123 Wird eine natürliche Zahl vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem mit der Basis b umgerechnet, so lässt sich die Anzahl der benötigten Ziffern mit $s = 1 + \lfloor \log_b(y) \rfloor$ ($\lfloor ... \rfloor$ Gaußklammern) berechnen.

AB

1) Wie viele Stellen werden benötigt, um die Zahl 188 im Binärsystem darzustellen?

2) In welchem Zahlensystem werden für die Darstellung der Zahl 432 nur 3 Stellen benötigt?

4.124 In der Astronomie wird als Maß für die Distanz r in Parsec (1 pc = $30{,}856 \cdot 10^{12}$ km) eines Sterns von der Erde der so genannte Entfernungsmodul verwendet:

ABD

$$m - M = 5 \cdot \lg(r) - 5$$

Dieser beschreibt die Differenz zwischen der scheinbaren Helligkeit m eines Sterns in Magnituden (mag) und der absoluten (tatsächlichen) Helligkeit M eines Sterns. Dabei gibt die scheinbare Helligkeit an, wie hell ein Stern von der Erde aus erscheint.

Der Stern Sirius hat eine scheinbare Helligkeit m = –1,46 mag und eine absolute Helligkeit M = 1,43 mag. Berechne seine Entfernung von der Erde

4.4 Logarithmische Funktionen und Skalen

4.4.1 Logarithmische Funktionen

Exponentialfunktionen erfüllen die in Abschnitt 1.2 behandelten Voraussetzungen für die Existenz einer Umkehrfunktion. Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion erhält man, indem in der ursprünglichen Funktionsgleichung x mit y vertauscht wird und die Gleichung dann wieder explizit bezüglich y angegeben wird.

ZB: Exponentialfunktion: $y = 2^x$; Umkehrfunktion: $x = 2^y \Rightarrow y = \log_2(x)$

Die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion $y = a^x$ mit $a > 0$, ist die **Logarithmusfunktion** $y = \log_a(x)$ für $x > 0$.

Eigenschaften von $y = \log_a(x)$

$a > 1$

$0 < a < 1$

- Alle Logarithmusfunktionen sind nur für positive Werte definiert: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- Wertebereich: $\mathbb{R}$
- $a > 1 \Rightarrow$ streng monoton steigend
  $0 < a < 1 \Rightarrow$ streng monoton fallend
- Wegen $\log_a(1) = 0$ verlaufen alle Funktionsgraphen durch P(1|0).

Logarithmisches Wachstum

Bisher wurde lineares und exponentielles Wachstum untersucht. Von linearen Funktionen ist bekannt, dass gleichem additiven Zuwachs der Argumente gleicher additiver Zuwachs der Funktionswerte entspricht. Exponentielles Wachstum hat die Eigenschaft, dass gleichem additiven Zuwachs der Argumente jeweils eine Multiplikation mit dem gleichen Faktor entspricht.

Lineares Wachstum:

$y = k \cdot x + d \Rightarrow y(x + \mathbf{h}) = y(x) + \mathbf{k \cdot h}$

Exponentielles Wachstum:

$y = a^x \Rightarrow y(x + \mathbf{h}) = y(x) \cdot \mathbf{a^h}$

Logarithmisches Wachstum:

ZB: $y = \lg(x)$

x	y
1	0
10	1
100	2

(x: · 10, · 10; y: + 1, + 1)

$y = \log_a(x \cdot \mathbf{h}) = \log_a(x) + \mathbf{\log_a(h)} = \log_a(x) + \mathbf{c}$

Jeder Multiplikation des x-Werts mit einem konstanten Faktor h entspricht somit jeweils eine Addition von $\log_a(h)$ zum Funktionswert.

Viele Vorgänge, die man in der Natur beobachten kann, können durch diese Gesetzmäßigkeit beschrieben werden. So steigt zum Beispiel der Schalldruckpegel, den wir empfinden, bei zunehmendem Schalldruck logarithmisch (siehe Aufgaben 4.119, 4.120, 4.121). Das Lichtempfinden hängt auf die gleiche Weise von der Lichtintensität ab usw.

4.125 Ermittle die Umkehrfunktion zur gegebenen Exponentialfunktion rechnerisch und grafisch. B

a) $y = 2^x$ **b)** $y = 3^{-x}$ **c)** $y = e^x$ **d)** $y = 4^{-x}$ **e)** $y = 10^x$

4.126 Gib den Definitionsbereich der logarithmischen Funktion an, erstelle eine Wertetabelle und zeichne die Funktion in einem geeigneten Maßstab. B

a) $y = 3 \cdot \lg(x)$ **c)** $y = \ln(x - 1)$ **e)** $y = \log_2(x)$ **g)** $y = \ln(1 - x)$

b) $y = \frac{1}{2} \cdot \ln(x)$ **d)** $y = 5 \cdot \lg\left(\frac{x}{2}\right)$ **f)** $y = \log_4(x - 3)$ **h)** $y = \lg(x) + 2$

4.127 Das Alter einer Fichte kann man näherungsweise aus der Dicke des Stamms errechnen. Dazu wird der Durchmesser des Stamms in ca. 1,30 m Höhe gemessen. ABC TE

Für das Alter t (in Jahren) gilt: $t(d) = 20 \text{ Jahre} \cdot \ln\left(\frac{20 \cdot d}{1\,\text{m} - d}\right)$ d ... Durchmesser (in Meter)

1) In welchem Bereich kann der Durchmesser d bei Verwendung dieser Formel liegen?
2) Stelle die Funktion für Durchmesser von 10 cm bis 80 cm grafisch dar.
3) Wie alt ist ein Baum mit einem Durchmesser von 0,5 Meter mindestens?
4) Gib eine Formel für den Durchmesser d in Abhängigkeit vom Lebensalter t des Baums an.

4.128 Der entzündungshemmende Arzneistoff Diclofenac wird im Körper exponentiell abgebaut. Seine wirksame Menge im Körper halbiert sich im Mittel alle 1,5 Stunden. Jemand nimmt um 16:00 Uhr eine Tablette mit einer Wirkstoffmenge von 50 mg ein. AB

1) Gib an, nach welcher Zeit die wirksame Menge im Körper auf 20 mg bzw. auf 10 mg gesunken ist.
2) Gib die Funktion an, die der abgebauten Wirkstoffmenge die seit der Einnahme vergangene Zeit zuordnet und stelle sie für Wirkstoffmengen bis 45 mg grafisch dar.

4.129 In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität I mit der Länge des zurückgelegten Wegs s in einem Maß ab, das proportional zur jeweiligen Intensität ist. Ein Versuch hat gezeigt, dass die Intensität nach jeweils 2 km um 10 % abnimmt. ABCD TE

1) Gib eine Funktion an, die der Entfernung s (in km) vom Ausgangspunkt die Intensität in Prozent des Ausgangswerts zuordnet. In welcher Entfernung beträgt die Intensität nur mehr die Hälfte des Ausgangswerts?
2) Gib eine Funktion an, die der Intensität I (in Prozent des Ausgangswerts) eine Entfernung s (in km) zuordnet und stelle sie grafisch dar. Lies aus der Zeichnung ab, wie weit vom Ausgangspunkt die Intensität noch 70 % beträgt.
3) In Glasfaserkabeln eines anderen Herstellers nimmt die Intensität um 8 % pro Kilometer ab. Begründe, welche der folgenden Funktionen diese Situation korrekt wiedergeben.

A) $I(s) = I_0 \cdot 1{,}08^s$ **B)** $I(s) = I_0 \cdot 1{,}92^s$ **C)** $s(I) = \frac{\ln(I) - \ln(I_0)}{\ln(0{,}92)}$ **D)** $s(I) = \frac{\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)}{\lg(0{,}92)}$

4.130 1935 entwickelte der amerikanische Seismologe Charles Francis Richter (1900 – 1985) eine logarithmische Skala (Basis 10) zur Beschreibung der Stärke von Erdbeben. Ein Erdbeben der Stärke 2 ist zehnmal so stark wie eines der Stärke 1. Zur Beschreibung der freigesetzten Energie kann die entsprechende Menge des Sprengstoffs TNT (Trinitrotoluol) angegeben werden. Einem Beben der Stärke 2 entspricht ein TNT-Äquivalent von einer Tonne, einem Beben der Stärke 4 entspricht eine Kilotonne TNT. ABC

1) Gib eine Funktion der Form $y(x) = c \cdot a^x$ an, die einer Erdbebenstärke x ein TNT-Äquivalent y zuordnet.
2) Gib eine Funktion an, die einem TNT-Äquivalent die Erdbebenstärke zuordnet.
3) Bei der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl wurde Energie im Ausmaß von 178 Tonnen TNT-Äquivalent freigesetzt. Welcher Erdbebenstärke entspricht das?

4.4.2 Logarithmische Skalierungen

Eine Studie mit Munduruku, einem Volk, das im Amazonaswald lebt, hat gezeigt, dass der Mensch in seinem Inneren logarithmisch denkt. Die Ureinwohner haben keine mathematische Bildung westlicher Prägung. Bei der Aufgabe, auf einer Skala die Zahlen zwischen 1 und 10 anzuordnen, haben sie die Abstände zwischen den größeren Zahlen jeweils kleiner gewählt. Auch Untersuchungen mit Kindern im Vorschulalter kamen zu einem ähnlichen Ergebnis.

BCD **4.131** Auf einer Skala sind die Werte 0,1; 0,2; 0,5; 2; 4; 37; 128; 456; 690 einzutragen.

1) Überlege, welcher Maßstab gewählt werden kann, wenn die kleinsten Werte gerade noch voneinander unterschieden werden sollen.

2) Welcher Maßstab sollte gewählt werden, um die größten Werte gerade noch auf einem A4-Blatt darstellen zu können?

Möchte man sehr kleine und sehr große Werte auf einer gemeinsamen Skala grafisch veranschaulichen, so ist das mit einem linearen Maßstab oft nicht möglich. Man kann dann eine Skala verwenden, bei der gleiche Abstände nicht gleichem additivem Zuwachs bei der Ausgangsgröße entsprechen.
ZB: Die Masse von Tieren soll auf einer Skala grafisch veranschaulicht werden.

0 1 2 3 4 5 6
um 1 kg schwerer

1 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5
10-mal so schwer

lineare Skala
ZB: 1 kg ... 1 cm von 0 kg entfernt
4 kg ... 4 cm von 0 kg entfernt

Die **Entfernung** eines Werts zum Ursprung der Skala ist **proportional zur Größe** des Werts.

logarithmische Skala
ZB: Beginn der Skala: 1 ($= 10^0$)
10^1 kg ... 1 cm von 1 kg entfernt, da $\lg(10^1) = 1$
10^4 kg ... 4 cm von 1 kg entfernt, da $\lg(10^4) = 4$
80 000 kg ... 4,9 cm von 1 kg entfernt, da $\lg(80\,000) \approx 4{,}9$
Ist die Markierung 3,5 cm von der 1-kg-Markierung entfernt, dann ist der Wert $10^{3,5}$ mal so groß, also $1\text{ kg} \cdot 10^{3,5} \approx 3\,162$ kg.

Die **Entfernung** zum Ursprung der Skala ist **proportional zum Zehnerlogarithmus** des dargestellten Werts.

Werden auf einer Skala von einem Ursprung ausgehend die Funktionswerte y einer Funktion $y = f(x)$ markiert und mit den x-Werten beschriftet, so erhält man eine **Funktionsleiter**.

Eine **logarithmische Funktionsleiter** ist eine Skala, bei der von einem Ursprung ausgehend die Logarithmen der Werte aufgetragen werden. Gleichen Abständen auf der Skala entsprechen dann gleiche Änderungsfaktoren. Da der Logarithmus von 0 nicht definiert ist, kann der Ursprung einer solchen Skala nie 0 sein.

Vor der Erstellung einer logarithmischen Skala müssen der darzustellende Wertebereich und die Länge der Skala festgelegt werden.

BC

4.132 ***1)*** Erstelle eine ca. 15 cm lange logarithmische Skala zur Darstellung von Werten von 10^{-2} bis 10^5.

2) Kennzeichne die Werte 47 und 4 700 auf dieser Skala. Vergleiche ihre Abstände von der jeweils nächstkleineren Zehnerpotenz. Was fällt dir auf?

3) Gib an, welchem Wert eine Markierung auf der Skala 1,5 cm rechts vom Teilstrich für den Wert 100 entspricht.

Lösung:

1) $10^{-2} \cdot 10^{7} = 10^{5} \Rightarrow$
7 gleich lange Teilbereiche
Zeicheneinheit: 1 E = 2 cm
„Ursprung" der Skala meist $10^0 = 1$

- Einheit E so wählen, dass die benötigte Anzahl von Teilbereichen ungefähr die gewünschte Gesamtlänge ergibt.

2) lg(47) = 1,672... Markierung für 47 = $10^{1,672}$ liegt 1,672... · 2 cm ≈ 3,3 cm von $1 = 10^0$ entfernt.
lg(4 700) = 3,672... Markierung für 4 700 = $10^{3,672}$ liegt 3,672... · 2 cm ≈ 7,3 cm von $1 = 10^0$ entfernt.
Auf der Skala ist 47 von 10 genau so weit entfernt wie 4 700 von 1 000.

3) 1,5 cm : 2 cm = 0,75 ⇒ Markierung entspricht $10^2 \cdot 10^{0,75} \approx$ **562**

Logarithmische Koordinatensysteme

Für die Darstellung von Funktionen in einem Koordinatensystem kann es vorteilhaft sein, für eine oder beide Achsen keine lineare, sondern eine logarithmische Skala zu verwenden. Ist die senkrechte Achse eine logarithmische Skala und die waagrechte eine lineare Skala, spricht man von einem **ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem**. Zur Unterscheidung wird die y-Achse mit dem Großbuchstaben Y bezeichnet.

Zeichnet man zum Beispiel die Exponentialfunktion $y = 5 \cdot 2^x$ mithilfe einer Wertetabelle in ein solches Koordinatensystem ein, so stellt man fest, dass eine Gerade entsteht. Man kann zeigen, dass jede beliebige Exponentialfunktion in solch einem Koordinatensystem als Gerade erscheint: Auf der x-Achse trägt man die tatsächlichen x-Werte als Abstände ein, auf der Y-Achse jedoch
$Y = E \cdot \lg(y)$ E ... Zeicheneinheit

Die dargestellte Gerade hat die Gleichung

$$Y = k \cdot x + d \;\Rightarrow\; E \cdot \lg(y) = k \cdot x + d \quad |:E$$

$$\lg(y) = \tfrac{k}{E} \cdot x + \tfrac{d}{E}$$

$$y = 10^{\frac{k}{E} \cdot x + \frac{d}{E}} = 10^{\frac{k}{E} \cdot x} \cdot 10^{\frac{d}{E}} = \left(10^{\frac{k}{E}}\right)^x \cdot 10^{\frac{d}{E}} = a^x \cdot c$$

Da k und E Konstanten sind, ist auch $10^{\frac{k}{E}}$ eine Konstante, die wir mit a bezeichnen können, ebenso ist $10^{\frac{d}{E}}$ eine Konstante c. Die Funktion, deren Schaubild eine **Gerade** ist, ist daher eine **Exponentialfunktion**.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

In einem **abszissenlogarithmischen Koordinatensystem** ist die waagrechte Achse logarithmisch skaliert, die senkrechte Achse linear. Das Schaubild jeder **logarithmischen Funktion** ist hier eine **Gerade** (Beweis siehe Aufgabe 4.141).

Sind beide Achsen eines Koordinatensystems logarithmisch skaliert, so spricht man von einem **doppeltlogarithmischen Koordinatensystem**.
Zeichnet man zum Beispiel die Potenzfunktion $y = 0{,}1 \cdot x^5$ ein, so erscheint sie als Gerade.
Da $\lg(y) = \lg(a \cdot x^n) = \lg(a) + n \cdot \lg(x)$ ist, erscheint jede **Potenzfunktion** $y = a \cdot x^n$ hier als **Gerade**: $y = \lg(a) + n \cdot X$

Funktionstyp	Koordinatensystem	Graph
$y = c \cdot a^x$	ordinatenlogarithmisch	Gerade
$y = \log_a(x)$	abszissenlogarithmisch	Gerade
$y = a \cdot x^n$	doppeltlogarithmisch	Gerade

ABC **4.133** Stelle die Einwohnerzahl (Stand: 2011) der folgenden Orte auf einer geeigneten logarithmischen Skala dar:
I: Gramais (Tirol): 62 Einw. II: Neusiedl am See: 6 800 Einw. III: Graz: 256 000 Einw.
IV: Wien: 1,7 Mio. Einw. VI: Mexico City: 8,7 Mio. Einw. VII: Shanghai: 18,9 Mio. Einw.
V: St. Petersburg liegt auf der Skala genau auf halber Strecke zwischen Wien und Mexico City. Ermittle die Einwohnerzahl.

ABC **4.134** Erstelle eine ca. 20 cm lange logarithmische Skala für die wichtigsten Ereignisse der Erdgeschichte (Anfangspunkt 5 Mrd. Jahre). Trage die folgenden Ereignisse ein:
I: Entstehung der Erde vor 4,6 Mrd. Jahren
II: Entstehung mehrzelligen Lebens vor 500 Mio. Jahren
III: Vorherrschaft der Vögel und Säugetiere vor 50 Mio. Jahren
IV: Auftreten des Homo sapiens sapiens vor 50 000 Jahren
V: Zeitalter der Globalisierung und Kommunikation vor 50 Jahren
VI: Das Zeitalter der Dinosaurier wird 16,7 cm von 10^0 entfernt eingetragen. Ermittle, vor wie vielen Jahren die Dinosaurier gelebt haben.
Hinweis: Zeichne eine Skala, auf der sich „Heute“ = 10^0 ganz rechts befindet.

AC **4.135** Ermittle die Gleichung der dargestellten Funktion.

Lösung:
$y = c \cdot a^x$
$y(0) = 20 \Rightarrow$
$20 = c \cdot a^0 \Rightarrow c = 20$
$y(1) = 100 \Rightarrow$
$100 = 20 \cdot a^1 \Rightarrow a = 5$
Funktionsgleichung:
$y = 20 \cdot 5^x$

- Gerade in ordinatenlogarithmischem Koordinatensystem ⇒ Exponentialfunktion
- Ablesen zweier Wertepaare, Einsetzen in die Funktionsgleichung und Lösen des Gleichungssystems.

4.136 Zeichne und beschrifte die Achsen in einem einfachlogarithmischen Koordinatensystem. Trage die gegebenen Punkte ein. B

a) x-Achse logarithmisch, Zeicheneinheit 2 cm, $1 \leqslant x \leqslant 1\,000\,000$
y-Achse linear, Zeicheneinheit 1 cm, $0 \leqslant y \leqslant 10$
P(300 000|4), Q(10 500|6)

b) x-Achse linear, Zeicheneinheit 2 mm, $0 \leqslant x \leqslant 50$
y-Achse logarithmisch, Zeicheneinheit 5 cm, $0{,}0001 \leqslant y \leqslant 1$
P(10|0,1), Q(34|0,05)

4.137 Ermittle die Gleichung der dargestellten Funktion. AC

a)

b)

c)

4.138 Im nebenstehenden Diagramm ist der Zerfall von Plutonium 239 dargestellt. ABC

1) Ermittle die Funktionsgleichung.
2) Welche Halbwertszeit hat Plutonium 239?
3) Nach welcher Zeit ist nur mehr $\frac{1}{16}$ der ursprünglichen Anzahl vorhanden?

4.139 In klarem Wasser nimmt die Intensität des Lichts um 11 % pro Meter ab (vergleiche Aufgabe 4.49). AB

1) Gib die Funktionsgleichung an.
2) Stelle die Abnahme der Lichtintensität in einem geeigneten logarithmischen Koordinatensystem dar.

4.140 Die beiden angegebenen Wertetabellen beschreiben jeweils eine Funktion. ABD

1) Begründe mittels eines geeigneten logarithmischen Koordinatensystems, welche Funktion eine Potenzfunktion und welche eine Exponentialfunktion beschreibt.
2) Bestimme jeweils die Funktionsgleichung.

A)

x	1	2	4	6	8
y	2	16	128	432	1 024

B)

x	1	2	4	6	8
y	6	18	162	1 458	13 122

4.141 Zeige, dass das Schaubild einer logarithmischen Funktion in einem abszissen-logarithmischen Koordinatensystem eine Gerade ist. D

4.5 Hyperbelfunktionen und Areafunktionen

4.5.1 Definition der Hyperbelfunktionen

In Barcelona kann man viele berühmte Gebäude des spanischen Architekten Antoni Gaudi (1852 – 1926) bewundern. Seine Werke wurden maßgeblich von Formen aus der Natur beeinflusst. Er hat Dachböden der von ihm erbauten Häuser so gestaltet, dass die Dachbalken eine Form wie die Spiegelbilder von durchhängenden Ketten haben. Durch diese Form sind sie stabil, ohne zusätzliche Stützbalken zu benötigen. Die Funktion, die die Form einer durchhängenden Kette mathematisch beschreibt, ist eine Kombination von Exponentialfunktionen, die **Kettenlinie** genannt wird. Sie gehört zu einer Gruppe von Funktionen, die sich an einer Einheitshyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ veranschaulichen lassen.

Hyperbelfunktionen

$y = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$ Hyperbelsinus
[Sprich „Sinus hyperbolicus von x"]

$y = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$ Hyperbelcosinus
[Sprich „Cosinus hyperbolicus von x"]

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x)$ Hyperbeltangens
[Sprich „Tangens hyperbolicus von x"]

Abb. 4.1

Funktionsgraphen der Hyperbelfunktionen

Zwischen den hyperbolischen Funktionen gelten folgende Zusammenhänge:
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$ $2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x)$

Sie lassen sich anhand der Definitionen leicht nachprüfen, zB:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left[\tfrac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right]^2 = \tfrac{1}{4} \cdot [e^{2x} + 2e^xe^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^xe^{-x} + e^{-2x})] =$$
$$= \tfrac{1}{4} \cdot (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1$$

Der Durchhang eines an zwei Punkten in gleicher Höhe befestigten Seils, zum Beispiel einer Stromleitung, kann durch eine Kettenlinie der Form $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ mit $a > 0$ beschrieben werden. Der Parameter a beschreibt die y-Koordinate des tiefsten Punkts des Seils. Er entspricht aber im Allgemeinen nicht dessen Höhe über Bodenniveau.

4.142 Berechne den Durchhang h des in Abb. 4.2 skizzierten Seils mithilfe der Funktion $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

AB

Lösung:

$y\,(0\text{ m}) = 20\text{ m} \Rightarrow 20\text{ m} = a \cdot \cosh(0)$ • $\cosh(0) = 1$

$\Rightarrow a = 20\text{ m}$

$P(15\text{ m}|y_P)$: $y_P\,(15\text{ m}) = 20\text{ m} \cdot \cosh\left(\frac{15\text{ m}}{20\text{ m}}\right) = 25{,}89\ldots\text{ m} \approx 26\text{ m}$

$h = y_P - 20\text{ m} \approx 6\text{ m}$

Der Durchhang h beträgt ca. 6 m.

Abb. 4.2

4.143 Die Enden eines Kabels sind in 12 m Entfernung voneinander montiert. Berechne den Durchhang des Kabels für a = 5 m mithilfe der Funktion aus Aufgabe 4.142. AB

4.144 Zeige die Gültigkeit der Formel mithilfe der Definitionen durch e-Funktionen. D

a) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$ **b)** $2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x)$

4.145 Ermittle jeweils den Wert für cosh(x) und tanh(x), wenn sinh(x) = 0,252 6 ist. AB

4.5.2 Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen: Areafunktionen

Da das Argument der Hyperbelfunktionen als Fläche interpretiert werden kann heißen deren Umkehrfunktionen **Areafunktionen** (lat. „area“ = Fläche), (s. Abb. 4.1). Aus der Definition der Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen ergibt sich, dass ihre Umkehrfunktionen mithilfe von Logarithmusfunktionen beschrieben werden können.

ZB: Umkehrfunktion von y = sinh(x):

$x = \sinh(y) = \frac{1}{2} \cdot (e^y - e^{-y}) \quad | \cdot 2e^y$

$2x \cdot e^y = (e^y)^2 - 1 \Rightarrow (e^y)^2 - 2x \cdot e^y - 1 = 0$

$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- Quadratische Gleichung in e^y
- Die 2. Lösung der quadratischen Gleichung ist hier auszuschließen: $\sqrt{x^2 + 1} > x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, aber $e^y > 0$

Areafunktionen

$y = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \in \mathbb{R}$ [Sprich: „Area sinus hyperbolicus von x“]

$y = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1$ [Sprich: „Area cosinus hyperbolicus von x“]

$y = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),\ |x| < 1$ [Sprich: „Area tangens hyperbolicus von x“]

Funktionsgraphen der Areafunktionen

4.146 Beweise die Richtigkeit der oben angegebenen Darstellung als Logarithmusfunktionen. D

a) y = arcosh(x) **b)** y = artanh(x)

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Zusammenfassung

Exponentialfunktionen mit der Basis a

$y = a^x \quad a > 0$ und $a \neq 1, x \in \mathbb{R}$

$a > 1 \Rightarrow$ streng monoton wachsend; $0 < a < 1 \Rightarrow$ streng monoton fallend

$y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ist symmetrisch zu $y = a^x$ bezüglich der y-Achse.

Wachstumsvorgänge

$y = c \cdot a^{k \cdot x} \quad (c > 0, a > 1, k > 0)$ bzw. $y = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Abklingvorgänge

$y = c \cdot a^{-k \cdot x} + d \quad (c > 0, a > 1, k > 0)$ bzw.

$y = c \cdot a^{k \cdot x} + d \quad (c > 0, 0 < a < 1, k > 0)$

Sättigungsvorgänge

$y = c \cdot (1 - a^{-x})$ bzw. $y = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$

Logistisches Wachstum

$y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ K ... Kapazitätsgrenze

Aperiodische Schwingungsvorgänge

$y = a \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} + b \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t}$ bzw. $y = (a - b \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Logarithmen

$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y) \quad (b > 0, b \neq 1, y > 0)$

Für jede Basis b ($b > 0, b \neq 1$) gilt:

$\log_b(b) = 1$, da $b^1 = b$ $\quad \log_b(1) = 0$, da $b^0 = 1$

Zusammenhang zwischen Logarithmen mit verschiedener Basis:

$\log_b(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(b)} = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$

Rechengesetze für Logarithmen

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

Logarithmusfunktion

$y = \log_a(x) \quad (x > 0)$ Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$

Logarithmische Skalen und Koordinatensysteme

- Ordinatenlogarithmische Koordinatensysteme: Die senkrechte Achse Y ist logarithmisch skaliert. Exponentialfunktionen erscheinen als Geraden.
- Abszissenlogarithmische Koordinatensysteme: Die waagrechte Achse X ist logarithmisch skaliert. Logarithmusfunktionen erscheinen als Geraden.
- Doppeltlogarithmische Koordinatensysteme: Beide Achsen X und Y sind logarithmisch skaliert. Potenzfunktionen erscheinen als Geraden.

Hyperbelfunktionen

$y = \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$ $y = \cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ $y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Areafunktionen

$y = \text{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \in \mathbb{R}$

$y = \text{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geqslant 1$

$y = \text{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),\ |x| < 1$

Weitere Aufgaben

Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

4.147 Ordne den Funktionsgraphen die richtige Funktionsgleichung zu. Eine Gleichung und ein Funktionsgraph können dabei nicht zugeordnet werden. Gib die fehlende Gleichung an. AC

a)

$y_1 = 2^{-x}$; $y_3 = 1 - 2^x$;
$y_2 = 2 - 2^x$; $y_4 = -2^{-x}$

b)

$y_1 = e^{0,5x}$; $y_3 = e^{-0,5x}$;
$y_2 = e^{-x} - 0,5$; $y_4 = 0,5e^x$

4.148 Eine Exponentialfunktion der Form $y = c \cdot a^x$ verläuft durch die Punkte A und B. Ermittle die Konstanten a und c sowie die fehlende Koordinate des Punkts P. B

a) $A(1|18)$, $B(4|31,104)$, $P(7|y_P)$ **b)** $A(2|16)$, $B(4|0,409\,6)$, $P(x_P|2,56)$

4.149 Gib jeweils die Funktionsgleichungen zu den beschriebenen Wachstumsfunktionen an. A

1) Ein Kapital von 350,00 € wächst jährlich um 5 % (ohne KESt).
2) Die Anzahl der Bakterien verdreifacht sich – ausgehend von ursprünglich 200 Stück – jede halbe Stunde.
3) Die Anzahl der Erkrankten steigt von anfänglich 200 Patienten täglich um 15 Patienten.

4.150 Erkläre, wie sich der Funktionswert von $y = 4^x$ ändert, wenn man D

a) x um 1 vergrößert. **c)** x um 2 verkleinert. **e)** x um 2a vergrößert.
b) x um 1 verkleinert. **d)** x um 0,5 vergrößert. **f)** x um a verkleinert.

4.151 Eine Funktion hat zum Zeitpunkt t = 0 den Funktionswert 100. Gib jeweils die Funktionsgleichung so an, dass die folgende Bedingung erfüllt ist. AC

1) Der Funktionswert steigt pro Sekunde um fünf an.
2) Der Funktionswert verdoppelt sich jede Stunde.
3) Der Funktionswert vermindert sich täglich um zwei.
4) Der Funktionswert halbiert sich jeden Tag.
5) Der Funktionswert nimmt täglich um 3 % ab.

C **4.152** Ergänze die im Text fehlenden Angaben mithilfe der gegebenen Funktionsgleichung.

1) $x(t) = 5 \cdot 2^{\frac{t}{3 \cdot h}}$
Auf einem Rosenstock befinden sich anfänglich ... Blattläuse. Alle ... Minuten ... sich die Anzahl der Blattläuse.

2) $W(t) = 300\,\ell + 25\,\frac{\ell}{h} \cdot t$
Eine Wassermenge von anfangs ... Liter steigt pro Stunde um ... Liter.

AC **4.153** Ermittle eine Formel zur Berechnung der Halbwertszeit eines Stoffs, dessen Stoffmenge sich jede Stunde um p % verringert.

BD **4.154** Der Schallpegel L wird durch die Formel $L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ dB beschrieben.
Erkläre, wie sich der Schallpegel ändert, wenn die Intensität
1) verzehnfacht, **2)** halbiert wird.

Rechnen mit Logarithmen

BD **4.155** Ermittle die Logarithmen im Kopf und begründe deine Antwort.

a) $\log_3(243)$ **c)** $\lg(10\,000)$ **e)** $\ln(\sqrt[5]{e^{-2}})$ **g)** $\log_{2b}(4b^2)$ **i)** $\log_4(0{,}25)$
b) $\log_b(\sqrt[3]{b})$ **d)** $\ln(e^{-2})$ **f)** $\lg\left(\frac{1}{100\,000}\right)$ **h)** $\log(\sqrt{0{,}01})$ **j)** $\log_5(\sqrt{5})$

B **4.156** Zerlege soweit wie möglich in Summen und Differenzen von Einzeltermen.

a) $\log\left(\frac{2x}{3y^2}\right)$ **b)** $\log\left(\sqrt{\frac{3z}{x-y}}\right)$ **c)** $\ln(4a^2 - 9v^2)$ **d)** $\ln\left(\frac{8w}{5s\sqrt{t}}\right)$ **e)** $\ln\left(\frac{\sqrt{3a} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{7n}\right)$

D **4.157** Erkläre, welche Fehler bei der Zerlegung gemacht wurden.

1) $\log\left(\frac{2a^4b}{c^2d}\right) = 4 \cdot \log(2a) + \log(b) - 2 \cdot \log(c) + \log(d)$

2) $\log\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right) = 2 \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(y) - \log(x - y) + \log(x + y)$

B **4.158** Fasse jeweils zum Logarithmus eines einzigen Terms zusammen und vereinfache diesen, wenn möglich.
a) $\log(x) - 2 \cdot \log(x^2) - 3 \cdot \log(4x)$ **b)** $2 \cdot \ln(a) + \ln(2a) - 1$ **c)** $\ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1)$

BD **4.159** Erkläre, welche Fehler gemacht wurden.

1) $\log(2) - \frac{1}{3} \cdot \log(a) + 4 \cdot \log(c) = \log\left(\frac{2}{\sqrt[3]{ac^4}}\right)$

2) $\frac{1}{4} \cdot [\ln(a) + 2 \cdot \ln(b) - \ln(c + d)] = \ln\left(\sqrt[4]{\frac{a \cdot b^2}{c \cdot d}}\right)$

Exponential- und Logarithmusgleichungen

B **4.160** Ermittle die Lösung der Gleichung ohne Taschenrechner.

a) $8^x \cdot 2^{4x+6} = 4^{x+2}$ **c)** $a^{2x+3} \cdot a^{4-x} = \frac{a^{x+1}}{a^{3-x}}$ $x = ?$
b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+5}$ **d)** $5^{x+2} + 2 \cdot 5^x = 3^{x+4} - 4 \cdot 3^{x+2}$

ABC **4.161** Löse die Gleichung grafisch.
a) $2^x = 8$ **b)** $5^{3x-1} = 4$ **c)** $3^x = 5$ **d)** $4^{0{,}5x} = 12$

TE

Aufgaben 4.162 – 4.164: Ermittle jeweils die Definitions- und die Lösungsmenge der Gleichung.

4.162 **a)** $\lg(x + 2) = 18$ **b)** $\lg(x) = 2 \cdot \lg(x - 3)$ **c)** $\ln(x) + 3 = \ln(x + 3)$ B

4.163 **a)** $\ln(x + 1) + \ln(x - 2) = -\ln(e^2)$ **b)** $\lg(x) + \lg(x + 1) = 2 \cdot \lg(1 - x)$ B

4.164 **a)** $e^4 \cdot x^{\ln(x)} = x^4$ **b)** $x^{\lg(x)} = 0{,}000\,1 \cdot x^4$ **c)** $x^{\ln(x) - 4} = e^{-3}$ B

4.165 Drücke die angegebene Variable aus. B

a) $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{x}{x+1}}$ $x = ?$

b) $\frac{\Theta_0 + c \cdot \ln(t)}{\ln(t_1)} = W$ $t = ?$

c) $w = 2 - \sqrt{x + e^{\frac{t}{b}}}$ $t = ?$

d) $V_1 - V_2 = s \cdot \ln\left(\frac{t_1}{t}\right)$ $t = ?$

e) $\frac{s \cdot t}{r} = a \cdot (e^x - e^{-y})$ $y = ?$

f) $(x - x_1) = 1 - (y - y_1) \cdot e^t$ $t = ?$

Logarithmische Skalierungen

4.166 Von einer Funktion $y = a \cdot b^x$ kennt man zwei Wertepaare. Trage sie in ein ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem ein und ermittle den gesuchten Zwischenwert durch Ablesen. BC

a) P(2|11,7), R(6,9|455,2), A(3,9|?) **b)** P(23 500|0,05), R(790|3,8), A(?|0,9)

4.167 In welcher Art von Koordinatensystem ist der Funktionsgraph eine Gerade? Zeichne sie anschließend mithilfe von 5 Wertepaaren. BC

a) $y = 35 \cdot x^3$ **b)** $y = 4{,}8 \cdot \ln(2x)$ **c)** $y = 25 \cdot 3{,}9^x$

4.168 Wie lautet die Gleichung der dargestellten Funktion? AC

a) **b)** **c)**

4.169 Recherchiere die Entfernungen von Mond, Sonne, α-Centauri und der Magellan'schen Wolke von der Erde und stelle sie auf einer geeigneten logarithmischen Skala dar. ABC

Hyperbelfunktionen und Areafunktionen

4.170 Prüfe die Richtigkeit der Formel mithilfe von e-Funktionen nach. B

a) $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$

b) $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$

4.171 Ein Seil ist an zwei 50 Meter voneinander entfernten Stützen in einer Höhe von 12 Meter aufgehängt. In der Mitte beträgt der Durchhang 7 m. Der Verlauf des Seils kann durch die Funktion $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$ (y ... Höhe über dem Boden in Meter, x ... Abstand von der Mitte in Meter) beschrieben werden. AB TE

1) Ermittle die Werte von a und b.

2) Ermittle die Gleichung der Parabel, die durch die Endpunkte des Seils und durch den tiefsten Punkt verläuft. Stelle die Funktion und diese Näherung grafisch dar.

Textaufgaben zu Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

AB **4.172** Organismen enthalten neben C-12 auch eine geringe Menge des radioaktiven Isotops C-14, wobei das Verhältnis von C-12 zu C-14 bei lebenden Organismen konstant ist. Mit dem Tod verändert sich dieses Verhältnis jedoch, da die C-14-Kerne, die eine Halbwertszeit von 5 730 Jahren haben, zerfallen und kein Kohlenstoff mehr vom Organismus aufgenommen werden kann.

1) Gib an, um wie viel Prozent sich der C-14-Gehalt in einem Jahr, in 100 Jahren bzw. in 10 000 Jahren ändert.

2) Eine Höhlenmalerei ist angeblich 30 000 Jahre alt. Wie viel Prozent des ursprünglichen C-14-Gehalts müssten nachweisbar sein?

3) Bei den Überresten des „Ötzi" betrug der C-14-Gehalt noch ca. 53 % des ursprünglichen Werts. Wie lang war er zu diesem Zeitpunkt demnach schon tot?

ABC **4.173** In einem Palmenhaus gedeiht eine exotische Lianen-Art. Ihr Wachstum lässt sich durch die Funktion $y(t) = 0{,}05\ \text{m} \cdot 4^{\frac{t}{\text{Monat}}}$ (y ... Länge in Meter) angeben.

1) Beschreibe mit eigenen Worten die Bedeutung der Größen in dieser Funktion.

2) Um welchen Faktor ändert sich die Länge der Lianen innerhalb einer Woche?

3) Wie lang sind die Lianen nach einem halben Jahr, wann sind sie mehr als 2 m lang?

AB **4.174** In der Erdatmosphäre nimmt der Luftdruck p mit zunehmender Seehöhe h ab. Die Abhängigkeit des Luftdrucks p (in Pascal) von der Höhe h (in Meter) lässt sich (annähernd) durch die so genannte **Barometrische Höhenformel** beschreiben:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}} \quad \text{mit } p_0 = 101\,325\ \text{Pa},\ H = 7\,991\ \text{m}$$

1) Stelle die Funktion grafisch dar.

2) Welcher Druck herrscht auf Meereshöhe?

3) Wie groß ist der Luftdruck am Gipfel des Großglockners (3 798 m) bzw. am Gipfel des Mount Everests (8 848 m)?

4) In welcher Höhe ist der Luftdruck halb so groß wie auf Meereshöhe?

5) Der höchste Berg Spaniens ist der 3 718 m hohe Teide auf Teneriffa. Mit einer Seilbahn kann man von 2 356 m Seehöhe ausgehend 1 199 Höhenmeter bewältigen. Um wie viel Prozent sinkt der Luftdruck zwischen Talstation und Bergstation?

ABC TE **4.175** Ein Kirschkernkissen kühlt nach dem Erhitzen sehr langsam nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz ab:

$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-kt} + T_U$ (T_0 ... Stofftemperatur, T_U ... Umgebungstemperatur)

Unmittelbar nach dem Erhitzen hat es eine Temperatur von 45 °C. Nach 30 Minuten in einem Zimmer mit einer Temperatur von 20 °C hat es noch 41 °C.

1) Gib die Abkühlungsfunktion für das Kirschkernkissen an und stelle sie grafisch dar.

2) Ermittle grafisch und rechnerisch, nach welcher Zeit das Kissen Körpertemperatur hat.

BCD TE **4.176** Die Verkaufszahlen eines neuen Smartphones lassen sich durch die folgende Funktion beschreiben: $y(t) = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-0{,}08t}}$ (t ... Anzahl der Tage)

1) Zeichne die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem. Beschreibe mit eigenen Worten um welche Wachstumsfunktion es sich handelt.

2) Lies aus der Zeichnung die Anzahl verkaufter Smartphones nach einem Tag und nach 10 Tagen ab.

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann den Begriff „Exponentialfunktion" erklären und Eigenschaften zu diesem Funktionstyp angeben.	
2	Ich kann den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum erklären.	
3	Welche Vorgänge werden durch die angegebenen Funktionen beschrieben? Ordne zu. 1) $y = 5 \cdot 1{,}03^x$ 2) $y = 20 - 3x$ 3) $y = 2 \cdot 0{,}4^x$ 4) $y = -3 + 4x$ A) lineares Wachstum C) exponentielle Abnahme B) exponentielles Wachstum D) lineare Abnahme	
4	Welcher exponentielle Vorgang wird jeweils durch die gegebene Gleichung beschrieben? A) $y = 2 \cdot 3^{-x}$ B) $y = 5 \cdot (1 - 2^{-x})$ C) $y = \frac{4}{1 + 2 \cdot e^{-3t}}$	
5	Was versteht man unter dem Logarithmus einer Zahl?	
6	Welche der folgenden Exponentialgleichungen können auch ohne Hilfe von Logarithmen berechnet werden? Begründe deine Antwort. A) $5^{x-2} = 3^{2x}$ B) $5^{x+1} = 3^{x+1}$ C) $5^{x-2} = 5^{2x}$ D) $5^{x+1} = 3^{x-1}$	
7	Gib zu den folgenden Funktionen jeweils die Umkehrfunktion an. A) $y = \lg(x)$ B) $y = \ln(x)$ C) $y = \log_a(x)$	
8	Überprüfe, welche der folgenden Umformungen falsch sind und stelle sie richtig. A) $\ln(4x^2) = 2 \cdot (\ln(4) + \ln(x))$ C) $\lg(x + 3) = \lg(x) \cdot \lg(3)$ B) $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ D) $10^{-2x \cdot \lg(4)} = 16^{-x}$	
9	Ermittle die Halbwertszeit eines Elements, wenn pro Stunde 8 % der Kerne zerfallen.	
10	Vervollständige die folgenden Aussagen. Der Graph jeder logarithmischen Funktion ist in einem ... Koordinatensystem eine Gerade. Der Graph jeder Exponentialfunktion ist in einem ... Koordinatensystem eine Gerade.	

Lösung:
1) siehe Seite 82ff 2) siehe Seite 79 3) 1B, 2D, 3C, 4A
4) A) Zerfallsfunktion, B) Sättigungsfunktion, C) Logistisches Wachstum 5) siehe Seite 97
6) B, gleicher Exponent; C, da gleiche Basis 7) A) $y = 10^x$, B) $y = e^x$, C) $y = a^x$ 8) A) falsch, die Potenz bezieht sich nur auf x, $\ln(4) + 2 \cdot \ln(x)$; B) richtig; C) falsch, Summen dürfen nicht zerlegt werden, $\lg(x + 3) = \lg(x + 3)$; D) richtig 9) $\tau \approx 8{,}3$ h 10) A) abszissenlogarithmischen, B) ordinatenlogarithmischen

5 Trigonometrie

Um Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken durchführen zu können, werden Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktionen verwendet, die auch trigonometrische Funktionen oder Kreisfunktionen genannt werden. Aufgaben aus der Mechanik, dem Vermessungswesen oder der Geografie können mit ihrer Hilfe gelöst werden. In vielen naturwissenschaftlichen Bereichen werden die Kreisfunktionen auch verwendet, um periodische Vorgänge zu beschreiben.

Die Winkelfunktionen wurden in Band 1 nur für Winkel zwischen 0° und 90° behandelt. In diesem Abschnitt werden sie nun für beliebige Winkel erweitert und ihre Eigenschaften untersucht. Außerdem werden Methoden erarbeitet, die Berechnungen in beliebigen Dreiecken ermöglichen.

5.1 Die Winkelfunktionen

5.1.1 Winkelfunktionen für beliebige Winkel

Zur Erinnerung:

- Im **rechtwinkligen Dreieck** gilt:
  $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\quad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$
- Umrechnung vom **Gradmaß** ins **Bogenmaß**:
  $x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$ rad (α in °, x in rad)

ABC **5.1** Berechne die Abmessungen x und y, wenn eine Tür mit 80 cm Breite um den gegebenen Winkel geöffnet wird.
1) 30° ***2)*** 70° ***3)*** 90° ***4)*** 110° ***5)*** 150°
Vergleiche die Werte für die Winkel 30° und 150° und für 70° und 110°. Was fällt dir dabei auf?
Gib jeweils eine Formel zur Berechnung von x und y an, die für beliebige Winkel gilt.

Um Winkelfunktionen für beliebige Winkel angeben zu können, definieren wir die bisher verwendeten Beziehungen nun allgemein. Dazu wird in einem Einheitskreis (r = 1 Einheit) ein Winkel eingetragen, wobei sich der Scheitel im Ursprung und ein Schenkel auf der x-Achse befindet. Anschließend überlegen wir, wie die Koordinaten des Schnittpunkts P des anderen Schenkels mit dem Einheitskreis mithilfe des Winkels α angegeben werden können.

Zeichnet man die Koordinatenstrecken ein, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge 1.

In diesem Dreieck gilt: $\cos(\alpha) = \frac{x_P}{1} = x_P$, $\sin(\alpha) = \frac{y_P}{1} = y_P$

Die Maßzahlen der Koordinaten des Punkts P sind daher der Cosinuswert bzw. der Sinuswert von α: $P(\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$

Ein weiterer Zusammenhang zwischen $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ kann mithilfe des Satzes von Pythagoras hergestellt werden:
Da $x_P^2 + y_P^2 = 1$ ist, folgt daraus: $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$
Meist wird $\sin^2(\alpha)$ anstelle von $(\sin(\alpha))^2$ und $\mathbf{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$ geschrieben.

Für den Tangens des Winkels α erhalten wir: $\tan(\alpha) = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Für den Cotangens gilt: $\cot(\alpha) = \frac{x_P}{y_P} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Da der Cotangens als Kehrwert des Tangens ermittelt werden kann, wird er bei praktischen Anwendungen nur selten verwendet.

Grafisch kann auch der Tangens am Einheitskreis veranschaulicht werden:

Durch den Punkt F(1|0) wird die Tangente an den Einheitskreis gezeichnet. Diese wird mit dem Schenkel des Winkels geschnitten. Man erhält ähnliche Dreiecke.

Da $\frac{\overline{FS}}{1} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$ ist, entspricht die Länge von FS dem Tangens von α.

Der Cotangens cot(α) kann auf der Tangente durch (0|1) abgelesen werden.

Ist $P(x_P|y_P)$ der zum Winkel α gehörige Punkt am Einheitskreis, so gilt:

$\cos(\alpha) = x_P$ ... x-Koordinate von P $\quad$ $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, für $\cos(\alpha) \neq 0$

$\sin(\alpha) = y_P$ ... y-Koordinate von P $\quad$ $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Durch die Interpretation der sin- und cos-Werte eines Winkels α als Koordinaten eines Punkts am Einheitskreis können nun auch die Winkelfunktionswerte von Winkeln $\alpha \geqslant 90°$ berechnet oder direkt aus dem Einheitskreis ermittelt werden.

5.2 Zeichne einen Einheitskreis mit 1 Einheit = 2 cm.

1) Trage den gegebenen Winkel ein und zeichne die Winkelfunktionswerte ein.

2) Miss die Längen ab und vergleiche die Messwerte mit den Taschenrechnerergebnissen.

a) α = 30° ***b)*** β = 235°

BC TE

Lösung:

a)

b)

Die Längen im Einheitskreis werden durch 2 cm dividiert und mit den richtigen Vorzeichen versehen.

	Gemessene Länge	Funktions-wert	TR-Ergebnis
sin(α)	1 cm	0,5	0,5
cos(α)	1,7 cm	0,85	0,866
tan(α)	1,2 cm	0,6	0,577

	Gemessene Länge	Funktions-wert	TR-Ergebnis
sin(β)	1,6 cm	–0,8	–0,819
cos(β)	1,2 cm	–0,6	–0,574
tan(β)	2,8 cm	1,4	1,428

Trigonometrie

In der folgenden Tabelle werden die Winkelfunktionswerte und deren Vorzeichen in den vier Quadranten angegeben.
Das Vorzeichen der Tangenswerte ergibt sich jeweils aus $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

2. Quadrant: $90° < \alpha < 180°$

$\sin(\alpha)$	+
$\cos(\alpha)$	–
$\tan(\alpha)$	–

1. Quadrant: $0° < \alpha < 90°$

$\sin(\alpha)$	+
$\cos(\alpha)$	+
$\tan(\alpha)$	+

3. Quadrant: $180° < \alpha < 270°$

$\sin(\alpha)$	–
$\cos(\alpha)$	–
$\tan(\alpha)$	+

4. Quadrant: $270° < \alpha < 360°$

$\sin(\alpha)$	–
$\cos(\alpha)$	+
$\tan(\alpha)$	–

Da der Punkt P am Einheitskreis liegt, gilt für alle Winkel: $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$ bzw. $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$
Das bedeutet, dass die Sinus- und Cosinuswerte zwischen –1 und 1 liegen.

Nähert sich der Winkel dem Wert 90°, so wird der Tangenswert immer größer. Bei 90° sind der Winkelschenkel und die Tangente an den Einheitskreis parallel, es gibt also keinen Schnittpunkt. Die Tangensfunktion ist daher für den Winkel 90° nicht definiert. Kommt der Winkel dem Wert 90° im 1. Quadranten beliebig nahe, so wird der Tangenswert beliebig groß. Man sagt: „Der Wert geht gegen Unendlich (+∞)." Nähert man sich dem Winkel 90° dagegen im 2. Quadranten in negativer Drehrichtung, nähert sich der Tangenswert (–∞). Analoges gilt für den Winkel 270°. Die Tangensfunktion ist also für die Winkel 90° und 270° nicht definiert. Der Wertebereich der Funktion ist $]-\infty; +\infty[$.

Definitions- und Wertebereiche der Winkelfunktionen
Sinusfunktion: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1, 1]$ Cosinusfunktion: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1, 1]$
Tangensfunktion: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1) \cdot 90°\}$ bzw. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$, $W_f = \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Aus dem Einheitskreis kann man die Winkelfunktionswerte spezieller Winkel ablesen.

	0° 0 rad	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin(\alpha)$	0	1	0	–1	0
$\cos(\alpha)$	1	0	–1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	nicht def.	0	nicht def.	0

Mithilfe des Einheitskreises lassen sich wichtige Zusammenhänge erkennen.

- **Negative Winkel:**

  Ein mathematisch negativer Winkel beschreibt eine Drehung im Uhrzeigersinn. Der Winkel $(-\alpha)$ liegt an derselben Stelle wie $(360° - \alpha)$. Es gilt:

  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\quad\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\quad\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

- **Komplementärwinkel:**

  Zwei Winkel α und β heißen komplementär, wenn sie einander auf 90° ergänzen, also $\beta = 90° - \alpha$ ist. Es gilt:

  $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$ bzw. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

  $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ bzw. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

  ZB: $\sin(60°) = \sin(90° - 30°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- **Supplementärwinkel:**

  Zwei Winkel α und β heißen supplementär, wenn sie einander auf 180° ergänzen, also $\beta = 180° - \alpha$ ist. Es gilt:

  $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$ bzw. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

  $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ bzw. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

  $\tan(180° - \alpha) = -\tan(\alpha)$ bzw. $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

  ZB: $\tan(135°) = \tan(180° - 45°) = -\tan(45°) = -1$

- **Winkel, die sich um 180° bzw. π unterscheiden:**

  $\sin(\alpha + 180°) = -\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

  $\cos(\alpha + 180°) = -\cos(\alpha)$ bzw. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

  $\tan(\alpha + 180°) = \tan(\alpha)$ bzw. $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

  ZB: $\cos(240°) = \cos(60° + 180°) = -\cos(60°) = -0{,}5$

- **Winkel, die sich um 360° bzw. 2π unterscheiden:**

  Vergrößert man den Winkel α um 360°, so erhält man dieselben Winkelfunktionswerte wie für den ursprünglichen Winkel α. Dies kann beliebig oft und in beide Richtungen durchgeführt werden.

  $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ $\quad\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$ $\quad\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 360°)$

  $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ $\quad\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ $\quad\tan(x) = \tan(x + 2k\pi)$ $\quad$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Aufgrund dieser Zusammenhänge können die schon aus Band 1 bekannten Winkelfunktionswerte für spezielle Winkel angegeben und für Winkel $\alpha \geqslant 90°$ erweitert werden.

	0° **0 rad**	**30°** $\frac{\pi}{6}$	**45°** $\frac{\pi}{4}$	**60°** $\frac{\pi}{3}$	**90°** $\frac{\pi}{2}$	**120°** $\frac{2\pi}{3}$	**135°** $\frac{3\pi}{4}$	**150°** $\frac{5\pi}{6}$	**180°** π	**270°** $\frac{3\pi}{2}$	**360°** 2π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nicht def.	0

AB **5.3** Erstelle mithilfe von GeoGebra eine Animation, die Sinus- und Cosinuswerte in Abhängigkeit eines beliebigen Winkels grafisch darstellt.

TE

Lösung:

- Man gibt zwei Punkte A(0|0) und B(1|0) in die Eingabezeile ein. Mithilfe von **Kreis durch Mittelpunkt und Punkt** zeichnet man einen Kreis **c** durch Anklicken von A und B. Somit erhält man den Einheitskreis.
- Man zeichnet mit **Punkt auf Objekt** einen beliebigen Punkt **C** auf **c** ein. Von A aus legt man mithilfe von **Strahl durch zwei Punkte** einen Strahl durch C.
- Durch den Punkt C legt man mithilfe von **Senkrechte Gerade** eine Normale auf die x-Achse und ermittelt mit **Schneide zwei Objekte** deren Schnittpunkt **D** mit der x-Achse.
- Man zeichnet mit **Strecke zwischen zwei Punkten** die Strecken d = AD und e = DC, die die Winkelfunktionswerte Cosinus bzw. Sinus darstellen, durch Anklicken von A und D bzw. D und C ein. Die Senkrechte durch DC kann verborgen werden.
- Mithilfe von **Winkel** bzw. **Abstand und Länge** werden durch nacheinander ausgeführtes Anklicken der entsprechenden Punkte die Größe des Winkels ∢(BAC) bzw. die Längen von d und e angezeigt.
- Mit gedrückter rechter Maustaste kann man den Punkt C entlang des Kreises verschieben. Dadurch verändert sich der Winkel und damit die zugehörigen Winkelfunktionswerte. Durch Klick auf die rechte Maustaste am Punkt C kann man auch über **Animation ein** den Punkt C den Kreis entlang laufen lassen.

Berechnung des Winkels zu einem gegebenen Winkelfunktionswert

Der Winkel zu einem gegebenen Winkelfunktionswert wird mithilfe der entsprechenden **Arcusfunktion** berechnet (vergleiche Band 1, Abschnitt 7).

ZB: $30° = \arcsin(0{,}5)$, da $\sin(30°) = 0{,}5$ ist.
Allerdings gilt auch $150° = \arcsin(0{,}5)$, da $\sin(150°) = 0{,}5$ ist.

Da es unterschiedliche Winkel gibt, die auf gleiche Funktionswerte führen, ist die Umkehrung, also die Berechnung des Winkels bei gegebenem Funktionswert, nicht eindeutig. Die meisten Taschenrechner geben für einen Wert nur einen Winkel aus. Die weiteren Winkel zu einem gegebenen Winkelfunktionswert können durch Überlegungen mithilfe des Einheitskreises ermittelt werden.

Bei der **Sinus-** und der **Tangensfunktion** wird der Winkel auf der rechten Seite des Einheitskreises ausgegeben. Der Wert des ausgegebenen Winkels liegt für den

Sinus im Bereich $-90° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

Tangens im Bereich $-90° < \alpha < 90°$.

ZB: $\arcsin(0{,}7) \approx 44{,}43°$

ZB: $\arctan(-0{,}7) \approx -34{,}99°$

Bei der **Cosinusfunktion** wird der Winkel auf der oberen Hälfte des Einheitskreises angegeben. Der Wert liegt im Bereich $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

ZB: $\arccos(-0{,}7) \approx 134{,}43°$

Wir beschränken uns im Allgemeinen auf die Berechnung von Winkeln im Bereich $0° \leqslant \alpha < 360°$ bzw. $0 \leqslant x < 2\pi$.

Bei Taschenrechnern werden die Arcusfunktionen oft über die Tastenkombination [2nd] + Winkelfunktion eingegeben.

Meist werden sie in der Form „$\sin^{-1}$“, „$\cos^{-1}$“ bzw. „$\tan^{-1}$“ dargestellt.

ZB: 2nd SIN ($\sin^{-1}$)

Diese Darstellung bedeutet in diesem Fall die Umkehrfunktion und darf nicht mit der Potenzschreibweise verwechselt werden.

Hinweise zur **Ermittlung von Winkeln**:

- Überlege, in welchen Quadranten die Winkel zu dem gegebenen Winkelfunktionswert liegen.
- Skizziere die Winkel im Einheitskreis und schätze die Größe der Winkel ab.
- Berechne die Größe der Winkel mithilfe des Taschenrechners.
- Bei der Probe können Ungenauigkeiten durch gerundete Werte entstehen.
- Die Berechnung der Winkel kann auch im **Bogenmaß** erfolgen. In diesem Fall muss der **Taschenrechner auf RAD** umgestellt werden.

Auf der nächsten Seite wird die Vorgehensweise zur Ermittlung der Winkel exemplarisch an drei Beispielen gezeigt.

ZB: $\sin(\alpha) = 0{,}57$; $\alpha = ?$

- Der Sinuswert ist positiv, daher liegen die zugehörigen Winkel im 1. und im 2. Quadranten.
- Um jene Punkte am Einheitskreis zu erhalten, deren y-Koordinaten den Wert 0,57 haben, tragen wir 0,57 auf der y-Achse auf und schneiden eine Parallele zur x-Achse mit dem Einheitskreis. Aus der Skizze kann man entnehmen, dass der erste Winkel zwischen 0° und 45° und der zweite Winkel zwischen 135° und 180° liegt.
- Der Taschenrechner gibt den Wert $\alpha_1 = \arcsin(0{,}57) \approx 34{,}75°$ aus. Mithilfe der Skizze kann man nun den Winkel α_2 bestimmen: $\sin(\alpha_2) = \sin(180° - \alpha_1) \Rightarrow \alpha_2 = 180° - \alpha_1 \approx 145{,}25°$
- Probe: $\sin(145{,}249...°) = 0{,}57$

ZB: $\cos(\alpha) = 0{,}48$; $\alpha = ?$

- Der Cosinuswert ist positiv, daher liegen die zugehörigen Winkel im 1. und im 4. Quadranten.
- Zum Wert 0,48 ergeben sich zwei Punkte am Einheitskreis. Schätzwerte: $45° < \alpha_1 < 90°$ und $270° < \alpha_2 < 315°$
- Der Taschenrechner gibt den Wert $\alpha_1 = \arccos(0{,}48) \approx 61{,}31°$ aus. Da $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(360° - \alpha)$ gilt, ist $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 \approx 298{,}69°$.
- Probe: $\cos(298{,}685...°) = 0{,}48$

ZB: $\tan(\alpha) = -2{,}65$; $\alpha = ?$

- Der Tangenswert ist negativ, daher liegen die Winkel im 2. und im 4. Quadranten.
- Auf der Tangente im Punkt $P(0|1)$ wird der Wert $-2{,}65$ (Q) markiert. Man legt eine Gerade durch Q und den Mittelpunkt des Kreises und erhält damit die gesuchten Winkel α_1 und α_2. Schätzwerte: $270° < \alpha_1 < 315°$ und $90° < \alpha_2 < 135°$
- Mithilfe des Taschenrechners erhält man: $\alpha = \arctan(-2{,}65) \approx -69{,}33°$; für den positiven Winkel gilt: $\alpha_1 \approx 290{,}67°$ Der Tangens eines Winkels hat nach einer Drehung um 180° wieder den gleichen Wert. $\tan(\alpha_2) = \tan(180° + \alpha) \Rightarrow \alpha_2 = 180° + \alpha \approx 110{,}67°$
- Probe: $\tan(290{,}674...°) = -2{,}65$ und $\tan(110{,}674...°) = -2{,}65$

BC **5.4** Berechne die Winkel x aus dem Intervall $[0; 2\pi[$, für die $\cos(x) = -0{,}7$ gilt. Zeichne dazu einen Einheitskreis und beschreibe deine Überlegungen.

Lösung:

Der Cosinuswert ist negativ, daher kann der Winkel x im 2. oder im 3. Quadranten liegen.
Der Wert $-0{,}7$ wird auf der x-Achse aufgetragen und die zugehörigen Winkel werden eingezeichnet.
Die Längen der Kreisbögen x_1 und x_2 am Einheitskreis entsprechen den Winkeln im Bogenmaß.
Man erhält die Länge x_2, indem man x_1 vom vollen Umfang 2π subtrahiert.

$x_1 = \arccos(-0{,}7) \approx 2{,}346$ rad $\qquad x_2 = 2\pi - x_1 \approx 3{,}937$ rad

5.5 Gib den Winkel im Gradmaß an. B

a) $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{3\pi}{2}$ **c)** $\frac{5\pi}{12}$ **d)** $\frac{10\pi}{9}$ **e)** $\frac{17\pi}{10}$

5.6 Gib den Winkel im Bogenmaß an, verwende dabei Bruchteile von π. B

a) 30° **b)** 135° **c)** 240° **d)** 195° **e)** 345°

5.7 Gib jeweils im Grad- und im Bogenmaß an, welchem Winkel die folgenden Drehungen entsprechen. AB

1) Viertel-Drehung **3)** Doppelte Drehung **5)** Achtel-Drehung
2) Sechstel-Drehung **4)** Eineinhalb Drehungen **6)** Sechzehntel-Drehung

5.8 Überlege jeweils das Vorzeichen des zum gegebenen Winkel gehörenden Winkelfunktionswerts und trage es in die Tabelle ein. C

	100°	311°	62°	180°	238°	392°	680°
sin(α)							
cos(α)							
tan(α)							

5.9 Setze das richtige Relationszeichen (<, >, =) ein. Veranschauliche deine Überlegungen mithilfe eines Einheitskreises. BC

a) sin(90°) … cos(0°) **c)** tan(45°) … sin(90°) **e)** cos(120°) … sin(120°)
b) sin(45°) … cos(45°) **d)** sin(−45°) … cos(−60°) **f)** cos(210°) … sin(330°)

5.10 In der Abbildung sind Winkelfunktionswerte im Einheitskreis farbig auf den Achsen eingezeichnet. BC

1) Gib an, welche Winkelfunktion in welcher Farbe dargestellt ist.
2) Zeichne jeweils alle Winkel mit der zugehörigen Farbe in den Einheitskreis ein, die den gleichen Funktionswert haben.

a) **b)** **c)**

5.11 Zeichne jeweils alle Winkel ein, die die angegebene Gleichung erfüllen. AB

1) sin(α) = −0,8 **2)** cos(β) = 0,6 **3)** tan(γ) = 0,4

5.12 Gib jenen spitzen Winkel an, der den gleichen Winkelfunktionswert hat. Veranschauliche deine Überlegungen mithilfe eines Einheitskreises. BC

a) sin(137°) **b)** tan(225°) **c)** cos(290°) **d)** tan(195°) **e)** cos(350°)

BC **5.13** Zeichne einen Einheitskreis mit 1 Einheit = 4 cm.
1) Trage den gegebenen Winkel ein und zeichne die Winkelfunktionswerte ein.
2) Miss die Längen ab und vergleiche sie mit den Taschenrechnerergebnissen.
a) $\alpha = 25°$ **b)** $\alpha = 240°$ **c)** $\alpha = 335°$ **d)** $\alpha = 125°$

BD **5.14** Begründe mithilfe des Einheitskreises, warum folgende Gleichung richtig ist.
a) $\sin(215°) = -\sin(35°)$ **c)** $\cos(150°) = -\cos(30°)$ **e)** $\tan(260°) = \tan(80°)$
b) $\sin(500°) = \sin(40°)$ **d)** $\cos(-112°) = -\cos(68°)$ **f)** $\tan(340°) = -\tan(20°)$

CD **5.15** Begründe, ob es zu den gegebenen Werten Winkel gibt. Gib gegebenenfalls an, in welchem Quadranten diese Winkel liegen.
a) 1) $\sin(\alpha) = 0{,}2$ **2)** $\cos(\alpha) = -1{,}6$ **3)** $\tan(\alpha) = 4$
b) 1) $\sin(\alpha) = -0{,}5$ **2)** $\cos(\alpha) = 0{,}1$ **3)** $\tan(\alpha) = -0{,}2$
c) 1) $\sin(\alpha) = 1{,}2$ **2)** $\cos(\alpha) = -0{,}7$ **3)** $\tan(\alpha) = -2{,}5$

ABC **5.16** Ermittle die Winkel α ($0° \leq \alpha < 360°$) ohne Taschenrechner.
a) $\sin(\alpha) = 0$ **b)** $\cos(\alpha) = -1$ **c)** $\sin(\alpha) = 0{,}5$ **d)** $\tan(\alpha) = 1$

ABC **5.17** Ermittle die Winkel x ($0 \leq x < 2\pi$) ohne Taschenrechner.
a) $\cos(x) = 0$ **b)** $\sin(x) = 1$ **c)** $\cos(x) = 0{,}5$ **d)** $\tan(x) = -1$

B **5.18** Berechne die Winkel α ($0° \leq \alpha < 360°$) mithilfe des Taschenrechners.
a) $\tan(\alpha) = -3{,}2$ **c)** $\sin(\alpha) = -0{,}56$ **e)** $\cos(\alpha) = 0{,}45$
b) $\sin(\alpha) = 0{,}15$ **d)** $\cos(\alpha) = -0{,}78$ **f)** $\tan(\alpha) = 0{,}92$

B **5.19** Berechne die Winkel x ($0 \leq x < 2\pi$) mithilfe des Taschenrechners.
a) $\sin(x) = 0{,}12$ **c)** $\tan(x) = -1{,}15$ **e)** $\tan(x) = 5{,}27$
b) $\cos(x) = 0{,}85$ **d)** $\cos(x) = -0{,}28$ **f)** $\sin(x) = -0{,}73$

BC **5.20** Marc ermittelt bei der Hausübung die Winkel zu einem gegebenen Winkelfunktionswert im Intervall [0°; 360°[. Überprüfe die Ergebnisse auf ihre Richtigkeit. Korrigiere sie gegebenenfalls und gib an, welche Fehler gemacht wurden.
1) $\sin(\alpha) = 0{,}4 \Rightarrow \alpha_1 = 23{,}58°, \alpha_2 = 156{,}42°$ **3)** $\cos(\alpha) = 0{,}7 \Rightarrow \alpha_1 = 45{,}57°, \alpha_2 = 134{,}43°$
2) $\tan(\alpha) = -1{,}5 \Rightarrow \alpha_1 = 56{,}31°, \alpha_2 = 236{,}31°$ **4)** $\sin(\alpha) = 0{,}9 \Rightarrow \alpha_1 = 1{,}12°, \alpha_2 = 178{,}88°$

B **5.21** Von einem Punkt P am Einheitskreis sind eine Koordinate und der Quadrant, in dem er sich befindet, bekannt. Gib den zugehörigen Winkel und die fehlende Koordinate an.
a) $P(x|0{,}12)$, 2. Quadrant **b)** $P(x|-0{,}57)$, 4. Quadrant **c)** $P(0{,}3|y)$, 1. Quadrant

BC **5.22** Veranschauliche die angegebenen Zusammenhänge mithilfe eines Einheitskreises.
a) $\cos(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha)$ **c)** $\sin(270° - \beta) = -\cos(\beta)$ **e)** $\tan(360° - \gamma) = -\tan(\gamma)$
b) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ **d)** $\tan(x + 3\pi) = \tan(x)$ **f)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$

AB **5.23** Der Minutenzeiger einer Uhr hat eine Länge von 10 cm, der Stundenzeiger ist 6 cm lang. Lege die Uhr so in ein Koordinatensystem, dass der Ursprung in der Mitte der Uhr liegt und die y-Achse durch 12 Uhr verläuft. Gib die Koordinaten der Spitzen der beiden Zeiger zu den gegebenen Zeiten an. **a)** 13:35 Uhr **b)** 08:15 Uhr **c)** 10:55 Uhr

ABD **5.24** In einem ebenen zentralen Kraftsystem wirken drei Kräfte $F_1 = 250$ N, $F_2 = 320$ N und $F_3 = 180$ N, die mit der x-Achse die Winkel $\alpha_1 = 35°$, $\alpha_2 = 160°$ bzw. $\alpha_3 = 255°$ einschließen.
a) Berechne Größe und Richtung der resultierenden Kraft durch Zerlegung der Kräfte in ihre x- und y-Komponente.
Hinweis: $F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, F_{Ry} analog, $F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$, $\tan(\varphi) = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$
b) Begründe, warum für jede Kraft und jeden Winkel gilt:
$F_x = F \cdot \cos(\alpha)$ und $F_y = F \cdot \sin(\alpha)$

5.1.2 Die Graphen der Winkelfunktionen und Arcusfunktionen

Da jedem Winkel ein eindeutiger Sinus-, Cosinus- und Tangenswert zugeordnet werden kann, handelt es sich bei diesen Zuordnungen um Funktionen. Die Funktionswerte der Sinus- und Cosinusfunktion sind nach jeder vollen Umdrehung des Winkels wieder gleich, das heißt, es handelt sich um periodische Funktionen mit einer Periode von 360° bzw. 2π.

Die Tangensfunktion ist wegen $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ für die Winkel 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ und 270° bzw. $\frac{3\pi}{2}$ nicht definiert, da $\cos(90°) = \cos(270°) = 0$ ist. Für die Tangensfunktion ergibt sich eine Periode von 180° bzw. π.

Im Folgenden werden die Winkelfunktionen grafisch dargestellt, wobei auf der waagrechten Achse der Winkel x im Bogenmaß aufgetragen wird. Die Maßzahl des Winkels im Bogenmaß entspricht der Bogenlänge des Einheitskreises.

Graph der Sinusfunktion – Sinuskurve

Stellt man sich vor, dass ein Punkt P am Einheitskreis „entlang läuft", so entspricht dessen y-Koordinate jeweils dem Sinuswert des zugehörigen Drehwinkels. Die Sinuswerte können somit direkt abgelesen und übertragen werden. Der zurückgelegte Weg des Punkts P entspricht der Größe des Winkels im Bogenmaß.

Wir zeichnen einen Einheitskreis mit selbst gewählter Einheit (zB 1 E $\triangleq$ 2 cm). Daneben zeichnen wir ein Koordinatensystem und tragen auf der x-Achse die Bogenlänge auf. Die Länge 2π entspricht dem „ausgerollten" Umfang des Einheitskreises. Wir tragen die wichtigsten Winkel (multipliziert mit der Einheit E) ein.

Die Punkte des Funktionsgraphen können nun wie folgt konstruiert werden:
ZB: Der Punkt P zum Winkel $\frac{\pi}{6}$ ($\triangleq$ 30°) wird am Einheitskreis markiert. Die y-Koordinate des Punkts P ist der Sinuswert des Winkels (hier 0,5) und wird als Funktionswert von $\frac{\pi}{6}$ eingezeichnet.

Wird diese Konstruktion für ausreichend viele Punkte durchgeführt, ergibt sich eine Kurve, der **Graph der Sinusfunktion**.

Abb. 5.1

Eigenschaften der Funktion $y = \sin(x)$:

- Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$, Wertebereich $W_f = [-1; 1]$
- Da $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ gilt, ist die Sinusfunktion eine **periodische Funktion**.
- Der Graph der Funktion $y = \sin(x)$ ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**, also ist $y = \sin(x)$ eine **ungerade Funktion**: $\sin(x) = -\sin(-x)$
- Nullstellen: $x = 0; \pi; 2\pi$ ...   Allgemein: $N(k\pi|0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Graph der Cosinusfunktion – Cosinuskurve

Der **Graph der Cosinusfunktion** entspricht dem um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobenen Graphen der Sinusfunktion, also $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Die Cosinusfunktion kann analog zur Sinusfunktion konstruiert werden.

Abb. 5.2

Eigenschaften der Funktion $y = \cos(x)$:

- Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$, Wertebereich $W_f = [-1; 1]$
- Da $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ gilt, ist die Cosinusfunktion eine **periodische Funktion**.
- Der Graph der Funktion $y = \cos(x)$ ist **symmetrisch zur y-Achse**, also ist $y = \cos(x)$ eine **gerade Funktion**: $\cos(x) = \cos(-x)$
- Nullstellen: $x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$ ... Allgemein: $N\left(\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}\middle|0\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Graph der Tangensfunktion – Tangenskurve

Da sich die Funktionswerte des Tangens nach einer Drehung von 180° wiederholen, beträgt die Periode π bzw. 180°. Bei den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ (90°), $\frac{3\pi}{2}$ (270°) ... ist der Tangens nicht definiert. Die Tangenswerte werden in deren Nähe „unendlich groß" und „springen" von $(+\infty)$ auf $(-\infty)$. Stellt man die Funktion grafisch dar, so nähern sich die Funktionswerte an diesen Stellen einer senkrechten Geraden (**Asymptote**). Solche Stellen werden als Unendlichkeitsstellen oder **Polstellen** bezeichnet. Beim **Graphen der Tangensfunktion** befinden sie sich bei $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ... .

Abb. 5.3

Eigenschaften der Funktion $y = \tan(x)$:

- Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2}\middle|k \in \mathbb{Z}\right\}$, Wertebereich $W_f = \mathbb{R}$
- Da $\tan(x) = \tan(x + \pi)$ gilt, ist die Tangensfunktion eine **periodische Funktion**.
- Der Graph der Funktion $y = \tan(x)$ ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**, also ist $y = \tan(x)$ eine **ungerade Funktion**: $\tan(x) = -\tan(-x)$
- Nullstellen: $x = 0; \pi; 2\pi$ ... Allgemein: $N(k\pi|0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Arcusfunktionen

In Abschnitt 5.1.1 wurde gezeigt, dass bei einem gegebenen Winkelfunktionswert der zugehörige Winkel nicht eindeutig ermittelt werden kann.

Um die Zuordnung „Winkelfunktionswert ⟶ Winkel" als Funktion, also eindeutig, definieren zu können, muss man den Definitionsbereich der Winkelfunktion geeignet einschränken (vergleiche Abschnitt 1). Werden die Winkelfunktionen jeweils auf einen Bereich eingeschränkt, in dem sie streng monoton fallend oder streng monoton steigend sind, so sind sie umkehrbar. Diese Umkehrfunktionen heißen **Arcusfunktionen** (latein: „arcus" = Bogen). Üblicherweise werden die Bereiche so gewählt, dass sie die Winkel des 1. Quadranten enthalten.

$y = \sin(x)$ ist streng monoton steigend in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \cos(x)$ ist streng monoton fallend in $[0; \pi]$ und $y = \tan(x)$ ist streng monoton steigend in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Man erhält die **Graphen der Arcusfunktionen** durch Spiegelung der entsprechend eingeschränkten Winkelfunktionen an der 1. Mediane.

Arcussinusfunktion

Die **Arcussinusfunktion** $y = \arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf den Bereich $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ eingeschränkten Sinusfunktion.

- Definitionsbereich: $D_f = [-1; 1]$
- Wertebereich: $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Arcuscosinusfunktion

Die **Arcuscosinusfunktion** $y = \arccos(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf den Bereich $[0; \pi]$ eingeschränkten Cosinusfunktion.

- Definitionsbereich: $D_f = [-1; 1]$
- Wertebereich: $W_f = [0; \pi]$

Arcustangensfunktion

Die **Arcustangensfunktion** $y = \arctan(x)$ ist die Umkehrfunktion der auf den Bereich $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ eingeschränkten Tangensfunktion.

- Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

TE

Technologieeinsatz: Graphen der Winkelfunktionen

TI-Nspire

Zeichnet man Winkelfunktionen am TI-Nspire in der Applikation **Graphs**, wird automatisch das Bogenmaß verwendet. Bei Berechnungen kann man die Winkelmaße unter **Einstellungen**, **Dokumenteinstellungen...**, **Winkel:** auswählen.

f1(x)=sin(x)
f2(x)=cos(x)
f3(x)=tan(x)

Die Werte der **Fenstereinstellungen** können mit π bzw. Vielfachen von π eingegeben werden, die Darstellung erfolgt automatisch als Dezimalzahl.

B **5.25** Zeichne eine Zahlengerade und markiere die entsprechenden Winkelwerte im Bogenmaß als Bruchteile von π. Wähle als Maßstab $\pi \triangleq 6$ cm.

1) $\alpha = 30°$ **2)** $\alpha = 45°$ **3)** $\alpha = 60°$ **4)** $\alpha = 120°$ **5)** $\alpha = 225°$ **6)** $\alpha = 300°$

CD **5.26** Nimm ein Blatt Papier und setze einen Stift darauf. Führe mit dem Stift senkrechte Auf- und Ab-Bewegungen aus, während deine Sitznachbarin oder dein Sitznachbar das Blatt Papier möglichst langsam und gleichmäßig unter deinem Stift nach links wegzieht. Welche Form entsteht dabei auf dem Papier? Erkläre, wie sie entstanden ist.

BC **5.27** **1)** Zeichne den Graphen der angegebenen Funktion mithilfe eines Einheitskreises (1 Einheit = 3 cm) im Bereich $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}\right]$.

2) Gib die Koordinaten der lokalen Maxima und Minima an.

a) Sinusfunktion **b)** Cosinusfunktion

B **5.28** Zeichne den Graphen der Tangensfunktion mithilfe eines Einheitskreises (1 Einheit = 2 cm) im Bereich $[-\pi; 2\pi]$.

BC **5.29** Gib an, in welchen Bereichen die gegebene Funktion

1) streng monoton fallend, **2)** streng monoton steigend ist.

a) y = sin(x) **b)** y = cos(x) **c)** y = tan(x)

BC **5.30** Stelle die gegebene Arcusfunktion grafisch dar, indem du die Winkelfunktion im benötigten Bereich zeichnest und anschließend an der 1. Mediane spiegelst. Wähle als Einheit 3 cm und trage mindestens vier Funktionswerte ein.

a) y = arcsin(x) **b)** y = arccos(x) **c)** y = arctan(x)

C **5.31** Fülle die Tabelle aus. Verwende dazu die Abbildungen auf Seite 135.

	y = arcsin(x)	**y = arccos(x)**	**y = arctan(x)**
Nullstellen			
Monotonie			
Symmetrie			

Aufgaben 5.32 – 5.34: Gib die Funktionswerte in Grad und Radiant an, ohne einen Taschenrechner zu verwenden. Dokumentiere deine Überlegungen.

5.32 **a)** $\arcsin(1)$ **b)** $\arcsin(-0{,}5)$ **c)** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ BC

5.33 **a)** $\arccos(0)$ **b)** $\arccos(0{,}5)$ **c)** $\arccos(-1)$ BC

5.34 **a)** $\arctan(0)$ **b)** $\arctan(1)$ **c)** $\arctan(\sqrt{3})$ BC

5.35 Ermittle grafisch alle Winkel im Bereich $[-1; 7]$, die die gegebenen Winkelfunktionswerte haben. Gib an, wie man rechnerisch auf diese Lösungen kommen kann und dokumentiere deine Vorgehensweise. BC
Hinweis: Verwende die Zeichnungen aus Aufgabe 5.27 und 5.28.
a) $\sin(x) = 0{,}5$ **b)** $\tan(x) = 1{,}5$

Lösung:

a)

Man zeichnet die Sinuskurve und schneidet sie mit der Geraden $y = 0{,}5$. Die x-Werte der Schnittpunkte sind die Winkel mit dem Sinuswert 0,5. Die gesuchten Winkel müssen im Bereich $[-1; 7]$ liegen.

Erster Schnittpunkt: $x_1 \approx 0{,}5$ $\left(\text{genau: } \frac{\pi}{6}\right)$
$x_3 \approx 6{,}8$ $\left(\text{genau: } x_1 + 2\pi = \frac{13\pi}{6}\right)$
Zweiter Schnittpunkt: $x_2 \approx 2{,}6$
$\left(\text{genau: } \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\right)$
Winkel: 0,5; 2,6; 6,8 bzw. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$

Aufgrund der Periodizität schneidet die Gerade die Sinuskurve jeweils im Abstand 2π von einem Schnittpunkt wieder (x_3). Wie man erkennen kann, gilt für den Schnittpunkt bei x_2:
$x_2 = \pi - x_1$, da $\sin(x) = \sin(\pi - x)$

b)

Man schneidet die Tangenskurve mit der Geraden $y = 1{,}5$ und liest die x-Werte der Schnittpunkte ab.

Da die Tangensfunktion π-periodisch ist, erhält man alle weiteren Winkel durch Addition von beliebigen ganzzahligen Vielfachen von π.
Die ersten beiden Winkel liegen im gegebenen Bereich.

$x_1 \approx 0{,}98$
$x_2 \approx 4{,}12 = x_1 + \pi$

Winkel: 0,98; 4,12

5.36 Verwende die Angabe aus Aufgabe 5.35. BC
a) $\sin(x) = 0{,}4$ **c)** $\cos(x) = 0{,}8$ **e)** $\tan(x) = -1$
b) $\sin(x) = -0{,}7$ **d)** $\cos(x) = -0{,}5$ **f)** $\tan(x) = 2$

5.2 Berechnungen im allgemeinen Dreieck

5.2.1 Zusammenhänge im allgemeinen Dreieck

Die Berechnung von Längen und Winkeln in Dreiecken ist in vielen Bereichen notwendig. Im Vermessungswesen wird die Position von Messpunkten mithilfe von Dreiecken bestimmt (Rückwärts-, Vorwärtseinschneiden), in der Mechanik oder Statik wird in einem Kräfteparallelogramm die Resultierende berechnet. Nun werden Formeln hergeleitet, mit deren Hilfe diese Berechnungen in allgemeinen Dreiecken durchgeführt werden können.

ABC **5.37** Eine Viehweide hat die Form eines Vierecks mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln, wobei a, α und β bekannt sind.

1) Gib eine Formel zur Berechnung der Länge x an.

2) Gib eine Formel zur Berechnung von b aus den gegebenen Größen a, α und β an. Beschreibe deine Vorgehensweise.

3) Berechne die Längen der übrigen Strecken sowie den Umfang der Viehweide, wenn für a = 40 m, α = 36,87° und β = 66,46° gilt.

4) Wie hoch sind die Anschaffungskosten für einen elektrischen Weidezaun, wenn jeweils 50 m des Zauns 55,90 € kosten?

Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks

Um den Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks zu ermitteln, kann man es durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke teilen und zuerst diese Höhe berechnen. Dieser Zwischenschritt kann allerdings mithilfe der folgenden Überlegungen entfallen:

Vom Dreieck ABC sind die Seiten a und c und der von ihnen eingeschlossene Winkel β gegeben.

Für die Höhe h_c im rechtwinkligen Dreieck FBC gilt:

$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \sin(\beta)$

Nun setzen wir in die Flächenformel ein und erhalten:

$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin(\beta)}{2}$

Bei Verwendung von $h_a = c \cdot \sin(\beta)$ erhält man dieselbe Formel: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$

Um diese Formel anwenden zu können, müssen **zwei Seiten** und der von ihnen **eingeschlossene Winkel** bekannt sein. Durch analoge Überlegungen bezüglich der Winkel α und γ erhält man zwei weitere Formeln.

Trigonometrische Flächenformel

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten multipliziert mit dem Sinusfunktionswert des eingeschlossenen Winkels.

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$$

Merkhilfe: „Seite mal Seite mal Sinus des eingeschlossenen Winkels durch zwei“

Der Sinussatz

Für die Berechnung der Seitenlängen und der Winkel gibt es Formeln, die die Teilung in rechtwinklige Dreiecke überflüssig machen. Setzen wir aus der trigonometrischen Flächenformel jeweils zwei Terme gleich, so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \Rightarrow a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \\ \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} \Rightarrow b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta) \Rightarrow \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = k$$

k ... konstant

Man erhält Gleichungen, in denen je **zwei Dreieckseiten** und zu jeder dieser Seiten jeweils der Sinuswert des **gegenüberliegenden Winkels** vorkommen.

Der Proportionalitätsfaktor k dieser Verhältnisse kann mithilfe des Umkreises des Dreiecks ABC ermittelt werden:

- Wir schreiben dem Umkreis des Dreiecks ABC ein weiteres Dreieck mit der Seite c als Grundlinie ein. Dabei wählen wir einen Punkt C′ auf dem Kreis so, dass eine Seite durch den Umkreismittelpunkt M verläuft. Wegen des **Satzes von Thales** ist dieses Dreieck rechtwinklig.
- Nach dem **Peripheriewinkelsatz** haben alle über der Kreissehne AB errichteten Dreiecke den gleichen Winkel γ. Daher gilt: $\gamma = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BC'A$
- Im rechtwinkligen Dreieck ABC′ gilt: $\sin(\gamma) = \frac{c}{2r} \Rightarrow 2r = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Da γ und c auch Bestimmungsstücke des Dreiecks ABC sind, gilt auch für dieses Dreieck der gleiche Zusammenhang. Damit erhält man den **Sinussatz**:

Sinussatz

In einem Dreieck ist das Verhältnis von Seitenlänge zu Sinuswert des gegenüberliegen Winkels konstant (k = 2r).

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$

r ... Umkreisradius

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Gleichungen des Sinussatzes anzugeben:

- Bilden des **Kehrwerts**: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$
  Diese Form erleichtert das Umformen, wenn ein Winkel gesucht ist.
- Als **Verhältnis der Seiten und Sinuswerte**: $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ bzw. $\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$ usw.
  In einem Dreieck ist das Verhältnis zweier Seitenlängen gleich dem Verhältnis der Sinuswerte der jeweils gegenüberliegenden Winkel.
- Als **fortlaufende Proportion**: $a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$

Betrachtet man jeweils eine Gleichung des Sinussatzes, so sieht man, dass drei Elemente gegeben sein müssen, um das vierte berechnen zu können. Daher kann der Sinussatz dann angewendet werden, wenn **zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel** (SSW) oder **zwei Winkel und eine Seite** (WSW oder SWW) gegeben sind.

Trigonometrie

Der Cosinussatz

Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben (SWS) oder drei Seiten (SSS) gegeben, kann der Sinussatz nicht angewendet werden. Daher muss anders vorgegangen werden.

Gegeben sind die Seiten a und c und der eingeschlossene Winkel β, gesucht ist die Seite b.

Man teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten h_c und u bzw. h_c und v.

$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \cdot \sin(\beta)$, $\cos(\beta) = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \cdot \cos(\beta)$

$u = c - v = c - a \cdot \cos(\beta)$

Nun kann mithilfe des Satzes von Pythagoras die Seite b durch die Angabeelemente a, c und β ausgedrückt werden:

$b^2 = h_c^2 + u^2 = (a \cdot \sin(\beta))^2 + (c - a \cdot \cos(\beta))^2$ — Anwenden der binomischen Formel

$b^2 = a^2 \cdot \sin^2(\beta) + c^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta) + a^2 \cdot \cos^2(\beta)$ — Zusammenfassen bzw. Herausheben

$b^2 = a^2 \cdot (\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)) + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$ — $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$

Analoge Formeln kann man für die anderen **Seitenpaare** und den jeweils **eingeschlossenen Winkel** angeben. Zusammengefasst ergibt sich der **Cosinussatz**.

Cosinussatz

In einem Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen, vermindert um das doppelte Produkt dieser Seiten mit dem Cosinuswert des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Merke: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{bc} \cdot \cos(\boldsymbol{\alpha})$

B **5.38** Von einem Dreieck sind verschiedene Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkel.

a) b = 80 mm, α = 35°, γ = 25° **b)** b = 12 cm, c = 17 cm, α = 55°

Lösung:

a) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 120°$

$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\beta)} \approx 39{,}04$ mm

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \approx 52{,}98$ mm

- Winkelsumme: α + β + γ = 180°
- Es sind **zwei Winkel** und **eine Seite** gegeben, daher verwendet man den **Sinussatz.**

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$a^2 = 198{,}980\ldots \text{ cm}^2 \Rightarrow a \approx 14{,}11$ cm

$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = 0{,}696\ldots$

$\Rightarrow \beta \approx 44{,}17°$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 80{,}83°$

- Es sind **zwei Seiten** und der **eingeschlossene Winkel** gegeben, daher wird der **Cosinussatz** verwendet.
- Berechnung des kleineren Winkels mit dem Sinussatz; er liegt der kürzeren Seite gegenüber und ist daher < 90°.

5.39 Schreibe für folgende Dreiecke ***1)*** den Sinussatz, ***2)*** den Cosinussatz an. Gib immer alle möglichen Gleichungen an.

A

a) ***b)*** ***c)***

5.40 Zeige, dass der Cosinussatz in einem rechtwinkligen Dreieck dem Satz des Pythagoras entspricht.

D

5.41 Zeige, dass der Sinussatz bei einem rechtwinkligen Dreieck auf den Zusammenhang „Sinus von $\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$" führt.

D

5.2.2 Lösungswege bei Dreiecksberechnungen

Aufgrund verschiedener möglicher Angabesituationen bei einem Dreieck ist es notwendig, unterschiedliche rechnerische Lösungswege zu wählen.

- **Eine Seite und zwei Winkel** (WSW oder SWW)
  Die Angabe einer Seite und zweier Winkel legt genau ein Dreieck fest (vergleiche Band 1). Der dritte Winkel kann über die Winkelsumme berechnet werden, die fehlenden Seiten mithilfe des **Sinussatzes** (siehe Aufgabe 5.38 a).
- **Zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel** (SSW)
  Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden:
  - Liegt die **längere Seite dem Winkel gegenüber**, ist die Aufgabe **eindeutig** lösbar. Man verwendet auch hier den **Sinussatz**.

5.42 Von einem Dreieck sind die Seitenlängen a = 6,2 cm und b = 3,5 cm sowie der Winkel $\alpha = 40°$ gegeben. Berechne die Länge der Seite c und die Größen der übrigen Winkel β und γ sowie den Flächeninhalt A. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

BC

Lösung:

Zuerst fertige ich eine Skizze an und markiere die gegebenen Größen farbig.
Aus der Angabe geht hervor, dass α der Seite a, also der längeren der beiden gegebenen Seiten, gegenüber liegt.

Den Winkel β kann ich mithilfe des Sinussatzes berechnen:

$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{a} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} \approx 0{,}362... \Rightarrow \beta_1 \approx 21{,}28°$ oder $\beta_2 \approx 158{,}72°$

Da β der kürzeren Seite gegenüber liegt, kann β nicht größer als 90° sein, daher kommt nur β_1 als Lösung in Frage.

Um γ zu ermitteln, nutze ich die Winkelsumme im Dreieck. Die Seitenlänge c erhalte ich mithilfe des Cosinussatzes.

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 118{,}72°$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \approx 71{,}55\text{ cm}^2 \Rightarrow c \approx 8{,}458...\text{ cm} \approx 8{,}5\text{ cm}$

Für den Flächeninhalt verwende ich die trigonometrische Flächenformel:

$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} \approx 9{,}51\text{ cm}^2$

- Liegt die **kürzere Seite dem gegebenen Winkel gegenüber**, können **drei Fälle** eintreten:
  Für das Dreieck gibt es entweder **zwei Lösungen**, **eine Lösung** oder **keine Lösung**.

BC **5.43** Von einem Dreieck sind die Seitenlänge $a = 6{,}8$ cm und der Winkel $\beta = 30°$ gegeben. Berechne die Seitenlänge c und die übrigen Winkel α und γ, wenn für die Seitenlänge b
1) 4 cm, ***2)*** 3,4 cm, ***3)*** 3 cm gegeben ist.
Konstruiere jeweils eine maßstabsgetreue Zeichnung und dokumentiere die Vorgehensweise.

Lösung:

1)

Der Winkel β liegt der Seite b, also der kürzeren der beiden gegebenen Seiten, gegenüber.

Wie aus der Zeichnung zu erkennen ist, gibt es zwei mögliche Dreiecke, die diese Eigenschaft haben.

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{b} = 0{,}85 < 1$$

$\alpha_1 \approx 58{,}21°$

$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 \approx 121{,}79°$

Für das gesuchte Dreieck sind beide Winkel α_1 und α_2 zum Sinuswert 0,85 möglich.

Alle weiteren Berechnungen müssen für beide Dreiecke erfolgen.
Den Winkel γ_1 bzw. γ_2 kann man mithilfe der Winkelsumme im Dreieck berechnen, die Seite c_1 bzw. c_2 erhält man mithilfe des Sinussatzes.

1. Dreieck: $\alpha_1 \approx 58{,}21°$

$\gamma_1 = 180° - (\alpha_1 + \beta) \approx 91{,}79°$

$$\frac{c_1}{\sin(\gamma_1)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$c_1 = \frac{b \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\beta)} = 7{,}996... \text{ cm} \approx 8{,}0 \text{ cm}$$

2. Dreieck: $\alpha_2 \approx 121{,}79°$

$\gamma_2 = 180° - (\alpha_2 + \beta) \approx 28{,}21°$

$$\frac{c_2}{\sin(\gamma_2)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$c_2 = \frac{b \cdot \sin(\gamma_2)}{\sin(\beta)} = 3{,}781... \text{ cm} \approx 3{,}8 \text{ cm}$$

2)

Ist die Länge der Seite $b = 3{,}4$ cm, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck.

$$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{b} = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$$

$$\gamma = 90° - \beta = 60°$$

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos(\beta) \approx 5{,}9 \text{ cm}$$

3)

Ist die Seite $b = 3$ cm lang, so ist sie „zu kurz", um für $\beta = 30°$ die Seite c zu „treffen".

$$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{b} = 1{,}133... > 1$$

Es ist nicht möglich, den Winkel α zu berechnen. Es gibt kein Dreieck, das die Angabe erfüllt.

In Aufgabe 5.43 ***1)*** gibt es zwei Lösungen. Welches der beiden Dreiecke das gesuchte ist, kann nur durch zusätzliche Informationen entschieden werden.

- **Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel** (SWS)
  Mit dieser Angabe wird **genau ein Dreieck** festgelegt. Die Berechnung der dritten **Seitenlänge** wird mit dem **Cosinussatz** durchgeführt. Die **Winkel** können mithilfe des **Sinus- oder** des **Cosinussatzes** ermittelt werden (siehe Aufgabe 5.38 b).

- **Drei Seiten** (SSS)
  Drei Seiten bilden nur dann ein Dreieck, wenn die Seitenlängen die Dreiecksungleichung ($a + b > c$ bzw. $b + c > a$ bzw. $a + c > b$) erfüllen. Ist diese Voraussetzung gegeben, so wird mithilfe des Cosinussatzes zuerst der größte Winkel, also jener, der der längsten Seite gegenüber liegt, berechnet. Danach können die weiteren Winkel mithilfe des Sinussatzes oder wieder mit dem Cosinussatz ermittelt werden.

5.44 Von einem Dreieck sind die Seitenlängen $u = 32$ mm, $v = 49$ mm und $w = 28$ mm gegeben (siehe Skizze).
Ermittle die Winkel δ, ε und φ des Dreiecks, indem du
1) zuerst den Winkel δ, ***2)*** zuerst den Winkel φ berechnest.
3) Erkläre den Unterschied zwischen den Vorgehensweisen.

BD

Lösung:

1) $v^2 = u^2 + w^2 - 2uw \cdot \cos(\delta)$ — • Berechnung des Winkels δ mithilfe des Cosinussatzes

$\cos(\delta) = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw} = -0{,}330...$

$\delta_1 \approx 109{,}32°$; ($\delta_2 = 360° - \delta_1 \approx 250{,}68°$) — • $\delta_2 > 180° \Rightarrow$ kein Dreieck

$\frac{\sin(\varphi)}{w} = \frac{\sin(\delta_1)}{v} \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{w \cdot \sin(\delta_1)}{v} = 0{,}539...$ — • Berechnung des Winkels φ mithilfe des Sinussatzes

$\varphi_1 \approx 32{,}63°$; ($\varphi_2 = 180° - \varphi_1 \approx 147{,}37°$) — • $\varphi_2 + \delta_1 > 180° \Rightarrow$ kein Dreieck

$\varepsilon = 180° - (\delta_1 + \varphi_1) \approx 38{,}04°$ — • Berechnung des Winkels ε mithilfe der Winkelsumme

2) $w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cdot \cos(\varphi)$ — • Berechnung des Winkels φ mithilfe des Cosinussatzes

$\cos(\varphi) = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv} = 0{,}842...$

$\varphi_1 \approx 32{,}63°$; ($\varphi_2 = 360° - \varphi_1 \approx 327{,}37°$) — • $\varphi_2 > 180° \Rightarrow$ kein Dreieck

$\frac{\sin(\delta)}{v} = \frac{\sin(\varphi_1)}{w} \Rightarrow \sin(\delta) = \frac{v \cdot \sin(\varphi_1)}{w} = 0{,}943...$ — • Berechnung des Winkels δ mithilfe des Sinussatzes

$\delta_1 \approx 70{,}68°$, $\delta_2 = 180° - \delta_1 \approx 109{,}32°$

$\varepsilon_1 = 180° - (\delta_1 + \varphi_1) \approx 76{,}69°$ — • Berechnung des Winkels ε mithilfe der Winkelsumme

$\varepsilon_2 = 180° - (\delta_2 + \varphi_1) \approx 38{,}04°$

Der Winkel δ muss größer als der Winkel ε sein ($v > u \Rightarrow \delta > \varepsilon$). Die Winkel δ_1 und ε_1 sind daher keine Winkel des gegebenen Dreiecks.
Das Dreieck hat die Winkel $\varphi \approx 32{,}63°$, $\delta \approx 109{,}32°$ und $\varepsilon \approx 38{,}04°$.

3) Berechnet man wie in ***2)*** zuerst den Winkel φ und anschließend den Winkel δ, muss man bei den beiden Lösungen für δ beachten, dass die Seite v länger als die Seite u ist, daher ist es einfacher, wie in ***1)*** mit dem größten Winkel zu beginnen.

Beim Auflösen von Dreiecken kann man die Ergebnisse folgendermaßen überprüfen:
Die **längste Seite** liegt immer dem **größten Winkel gegenüber**,
die **kürzeste Seite** liegt immer dem **kleinsten Winkel gegenüber**.

ACD **5.45** Vom folgenden Dreieck sind die beschrifteten Seiten und Winkel gegeben und alle übrigen gesucht.

1) Gib an, ob mit dem Sinus- oder Cosinussatz begonnen werden muss.

2) Worauf muss bei der Rechnung geachtet werden?

a) **b)** **c)** **d)**

ABD **5.46** Legen die angegebenen Bestimmungsstücke kein Dreieck, ein Dreieck oder zwei Dreiecke fest? Begründe deine Antwort.

1) a = 20 mm, b = 40 mm, c = 65 mm
2) b = 2,5 cm, c = 6,2 cm, β = 30°
3) b = 23 mm, c = 35 mm, α = 50°
4) a = 3 cm, b = 6 cm, α = 30°
5) a = 4 dm, b = 7 dm, c = 14 dm
6) a = 10 cm, c = 8 cm, γ = 50°

BCD **5.47** Verwende das nebenstehende Dreieck und begründe, welche der folgenden Aussagen richtig sind bzw. warum es die anderen nicht sein können.

1) $\frac{\sin(\varepsilon)}{p} = \frac{\sin(\omega)}{k}$
2) $A = \frac{m \cdot p \cdot \sin(\varepsilon)}{2}$
3) $\frac{p}{\sin(\varphi)} = \frac{m}{\sin(\varepsilon)}$
4) $\cos(\varepsilon) = \frac{k^2 + p^2 - m^2}{2kp}$
5) $\sin(\omega) = \frac{k}{p}$
6) $k^2 + m^2 + 2km \cdot \cos(\varphi) = p^2$

BD **5.48** Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks (Längen in Zentimeter). Gib jeweils an, welche Sätze du verwendest und erkläre, warum.

	a	b	c	α	β	γ	A
a)	110	85		70°			
b)	4,5	6	3,2				
c)	40				50°	32°	
d)		8		40°			1 286 mm²
e)		52	75		25°		
f)		23	42				1,65 dm²

B **5.49** Berechne die gesuchten Größen des Dreiecks.

a) r = 95,0 m
q = 57,2 m
ε = 51°
ges.: p, δ, ω

b) x_3 = 3,21 dm
ε_1 = 35,4°
ε_2 = 49,1°
ges.: x_1, x_2, ε_3

ABC **5.50** Von einem Parallelogramm sind die Seiten a = 7 cm, b = 5 cm und die Diagonale e = 11 cm gegeben. Berechne die Winkel α und β, den Flächeninhalt, die Länge der Diagonale f sowie den Winkel φ zwischen den Diagonalen. Verwende dazu die nebenstehende Skizze und dokumentiere deine Vorgehensweise.
Hinweis: Zerlege das Parallelogramm in Dreiecke.

B **5.51** Von einem Parallelogramm sind die Diagonalen e und f sowie der Winkel φ zwischen den Diagonalen gegeben. Berechne die Seiten a und b und die Winkel α und β.

a) e = 170 mm, f = 240 mm, φ = 105°
b) e = 3,2 dm, f = 2,5 dm, φ = 39°

5.52 Berechne die fehlenden Größen des Parallelogramms (Längen in Millimeter).

AB

	a	b	e	f	α	β	A
a)	32	57		80			
b)		145			72°		8 825,8 mm²
c)	276		250			56°	
d)		90	84	120			

5.53 Von einem Trapez sind die Längen der Seiten $a = 87$ mm, $c = 32$ mm und der Diagonale $e = 54$ mm sowie der Winkel $\alpha = 50°$ gegeben. Berechne die Winkel β, γ und δ und die Längen der Seiten b und d und der Diagonale f.

AB

Lösung:

$\delta = 180° - \alpha = 130°$ • α, δ sind Parallelwinkel

ΔACD: $\frac{\sin(\varphi)}{c} = \frac{\sin(\delta)}{e} \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{c \cdot \sin(\delta)}{e} = 0{,}453...$

$\varphi = 26{,}997...°$

$\omega = 180° - (\varphi + \delta) = 23{,}002...°$

$\frac{d}{\sin(\omega)} = \frac{e}{\sin(\beta)} \Rightarrow d = \frac{e \cdot \sin(\omega)}{\sin(\delta)} = 27{,}546... \approx 27{,}5$ mm

ΔABC: ∢BAC und ω sind Parallelwinkel

$b^2 = a^2 + e^2 - 2a \cdot e \cdot \cos(\omega) = 1\,836{,}093... \Rightarrow b = 42{,}849...$ mm $\approx 42{,}8$ mm

$\frac{\sin(\beta)}{e} = \frac{\sin(\omega)}{b} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{e \cdot \sin(\omega)}{b} = 0{,}492... \Rightarrow \beta = 29{,}502...° \approx 29{,}5°$

$\gamma = 180° - \beta = 150{,}497...° \approx 150{,}5°$

ΔABD: $f^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos(\alpha) = 5\,246{,}887... \Rightarrow f = 72{,}435...$ mm $\approx 72{,}4$ mm

5.54 Berechne die fehlenden Größen des Trapezes (Längen in Millimeter).

AB

	a	b	c	d	e	f	α	β	h	A
a)	110		41			97		32°		
b)	49	22			38		40°			
c)		24	15	37			35°			
d)	145		78				65°	35°		

5.55 Zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$, die in einem Punkt angreifen, schließen den Winkel α ein. Berechne die resultierende Kraft $\vec{F_R}$ und den Winkel φ, den diese mit $\vec{F_1}$ einschließt. Es gilt: $F = |\vec{F}|$
Überprüfe deine Ergebnisse mithilfe einer maßstabsgetreuen Zeichnung.

ABC

a) $F_1 = 450$ N, $F_2 = 320$ N, $\alpha = 55°$
b) $F_1 = 370$ N, $F_2 = 0{,}8$ kN, $\alpha = 78°$
c) $F_1 = 1{,}2$ kN, $F_2 = 400$ N, $\alpha = 110°$
d) $F_1 = 12$ kN, $F_2 = 27$ kN, $\alpha = 126°$

5.56 Zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$, die in einem Punkt angreifen, schließen den Winkel α ein. Berechne die resultierende Kraft $\vec{F_R}$ und die Kraft $\vec{F_D} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$. Es gilt: $F = |\vec{F}|$

AB

a) $F_1 = 720$ N, $F_2 = 1\,325$ N, $\alpha = 65°$ **b)** $F_1 = 2{,}33$ kN, $F_2 = 4{,}75$ kN, $\alpha = 82°$

5.57 Von einem Dreieck sind die Abmessungen $a = 2$ dm, $c = 2{,}4$ dm sowie $\beta = 30°$ gegeben.

ABCD

1) Erkläre mithilfe einer Skizze und anhand von Berechnungen, ob sich auch der Flächeninhalt des Dreiecks halbiert, wenn bei gleichbleibenden Seitenlängen der Winkel β halbiert wird.
2) Welchen anderen Wert kann β annehmen, sodass der Flächeninhalt gleich groß bleibt?

ABD **5.58** Um die Höhe eines Turms zu bestimmen, wird von zwei Punkten einer Ebene mit dem Abstand a jeweils der Höhenwinkel zur Turmspitze gemessen.

1) Berechne die Höhe des Turms, wenn a = 3 m, $\alpha = 32°$ und $\beta = 41{,}5°$ sind.

2) Gib eine Formel zur allgemeinen Berechnung der Höhe an.

3) Zeige allgemein, dass für $\beta = 2\alpha$ gilt: $h = a \cdot \sin(2\alpha)$

ABCD **5.59** Eine Antenne auf einem Hochhaus hat die Höhe h. Maja befindet sich in der gleichen Horizontalebene wie das Hochhaus und sieht den Fußpunkt der Antenne unter dem Höhenwinkel α und die Spitze unter dem Höhenwinkel β (Aughöhe 1,65 m).

1) Fertige eine Skizze an und berechne die Höhe des Hochhauses sowie die Entfernung von Maja zum Hochhaus. Formuliere zuerst deinen Rechenweg.

2) Wie verändern sich die Höhenwinkel α und β, wenn Maja sich dem Hochhaus nähert bzw. sich entfernt? Begründe deine Vermutung mithilfe einer Rechnung mit selbst gewählten Werten für die Entfernung vom Turm.

a) $\alpha = 62{,}5°$; $\beta = 64°$; h = 2,50 m **b)** $\alpha = 48{,}3°$; $\alpha = 49{,}1°$; h = 3,00 m

AB **5.60** Um die Lage eines Tatorts festzustellen, werden zwei Bilder verwendet, auf denen derselbe Turm zu sehen ist. Die Bilder wurden im Abstand von a = 2 m aufgenommen. Der Turm ist auf dem einen Bild unter einem Winkel von 89,3° zu sehen und auf dem zweiten unter 89,7°. In welcher Entfernung e vom Turm befindet sich der Tatort?

AB **5.61** Johannes und Melanie wollen eine Hängebrücke über einen Bach bauen. Dazu müssen sie ein Seil von einem Baum vom einen Ufer zu einem Baum in gleicher Höhe auf der anderen Seite spannen. Um die benötigte Seillänge zu bestimmen, stecken sie von einem der zwei Bäume aus eine 2 m lange Strecke ab und messen von deren Enden jeweils die Winkel $\alpha = 85{,}2°$ und $\beta = 67{,}1°$ zum anderen Baum. Berechne, wie lang das Seil mindestens sein muss, wenn man für den Durchhang 10 % der Entfernung e zwischen den Bäumen berücksichtigen muss.

AB **5.62** Zwischen den Häusern von Silke und Markus liegt ein Teich. Sie wollen Funkgeräte mit einer Reichweite von 100 m kaufen. Um herauszufinden, ob dies für die Entfernung zwischen ihren Häusern ausreicht, wählen sie eine Strecke s = 6 m, von der aus sie beide Häuser sehen können und messen die Winkel $\alpha = 119°$, $\beta = 19°$, $\gamma = 44°$ und $\delta = 153°$. Ermittle, ob die Funkgeräte die nötige Reichweite haben.

ABC **5.63** An einer Küste befinden sich die Stationen P, Q und R, die von einem Kreuzfahrtschiff S mittels Funk angepeilt werden. Aus einer Karte entnimmt man die Daten für die gegenseitige Lage der drei Stationen: $\overline{PQ} = 58$ km; $\overline{QR} = 82$ km; $\gamma = ∢PQR = 162{,}6°$ Außerdem werden die Winkel $\alpha = ∢PSQ = 43{,}8°$ und $\beta = ∢QSR = 50{,}7°$ gemessen. Fertige eine Skizze an und berechne die momentanen Entfernungen des Schiffs von den Stationen. Formuliere zuerst deinen Rechenweg und dokumentiere deine Überlegungen.

5.64 Von einer 1 180 m über dem Glöppelsee gelegenen Aussichtswarte A auf dem Ziegenberg kann man mithilfe eines schwenkbaren Fernrohrs einen Punkt P auf der Seeterrasse des Restaurants „Blauer Esel" in Glöppel unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 26{,}63°$ anvisieren. Nach Schwenken des Fernrohrs um den Horizontalwinkel $\varphi = 123{,}43°$ sieht man einen Punkt Q in Klappel am gegenüberliegenden Ufer des Glöppelsees unter einem Tiefenwinkel von $\beta = 21{,}60°$. Gehe davon aus, dass P und Q in derselben Horizontalebene liegen.

ABCD

1) Überlege und entscheide, welche der angegebenen Skizzen die Situation beschreibt. Erkläre, warum es die andere nicht sein kann.

A)

B)

2) Berechne die direkte Entfernung zwischen den beiden Geländepunkten P und Q.

5.65 Drei Kräfte befinden sich im Gleichgewicht, wenn das aus den Kraftvektoren gebildete Vieleck (Krafteck) geschlossen ist, also die Resultierende gleich null ist. Wie groß sind die Winkel ε, ω und φ zwischen den Wirkungslinien der gegebenen Kräfte, wenn sich diese im Gleichgewicht befinden?

AB

a) $F_1 = 350$ N, $F_2 = 486$ N, $F_3 = 630$ N

b) $F_1 = 1{,}72$ kN, $F_2 = 1{,}89$ kN, $F_3 = 2{,}64$ kN

5.66 Ein Flugzeug mit einer Eigengeschwindigkeit v_F fliegt zu einer Insel, die in Richtung φ (über Grund) liegt. Ein Wind mit konstanter Geschwindigkeit v_W weht aus Richtung R.

AB

1) In welche Richtung muss der Pilot steuern? Gib den Kompasskurs bzgl. Norden, also den Winkel $\varphi + \delta$, an.

2) Welche Gesamtgeschwindigkeit v_g erreicht das Flugzeug?

a) $v_F = 600\,\frac{km}{h}$, $v_W = 60\,\frac{km}{h}$, R = SSO, $\varphi = 40°$

b) $v_F = 900\,\frac{km}{h}$, $v_W = 40\,\frac{km}{h}$, R = ONO, $\varphi = 35°$

5.67 Eine Fähre setzt von B aus mit einer mittleren Geschwindigkeit v_B zu einer Anlegestelle A am anderen Flussufer über. Die Fließgeschwindigkeit des Flusses beträgt v_F.

AB

1) Welchen Winkel ε zur Fließrichtung muss die Fähre einschlagen, um die Anlegestelle zu erreichen?

2) Wie groß ist die mittlere Gesamtgeschwindigkeit v_g?

3) Wie groß ist die Entfernung der Anlegestelle, wenn die Überfahrt t Minuten dauert?

a) Donau: $v_F = 10\,\frac{km}{h}$, $v_B = 15\,\frac{km}{h}$, t = 3 min, $\varphi = 65°$

b) Inn: $v_F = 1\,\frac{m}{s}$, $v_B = 2\,\frac{m}{s}$, t = 4 min, $\varphi = 70°$

5.3 Goniometrische Beziehungen

Beim Arbeiten mit Winkeln es oft erforderlich, Vergleiche zwischen Winkelfunktionswerten aufzustellen bzw. Beziehungen zwischen Winkeln zu verwenden. Man spricht daher allgemein von der **Goniometrie**, der Winkelmessung.

AD **5.68** Ein Gegenstand wird unter einem Höhenwinkel von 15° betrachtet, ein zweiter Gegenstand vom selben Standort aus unter dem doppelt so großen Höhenwinkel, also 30°. Ist der zweite Gegenstand doppelt so hoch wie der erste? Wenn du nicht sicher bist, überlege, was passiert, wenn der kleinere Winkel fast 45° beträgt.

D **5.69** Überprüfe mithilfe eines Einheitskreises, ob folgende Behauptungen richtig sind:

1) $\sin(60°) = 2 \cdot \sin(30°)$ ***2)*** $\cos(30°) = \frac{\cos(120°)}{4}$

Der Winkelfunktionswert der Summe zweier Winkel α und β ist nicht die Summe der einzelnen Winkelfunktionswerte, lässt sich jedoch aus den einzelnen Winkelfunktionswerten berechnen. Man erhält die zugehörigen Formeln zum Beispiel mithilfe des Einheitskreises.

Abb. 5.4

In den Einheitskreis werden ein Winkel α und ein Winkel β, der direkt an α anliegt, eingezeichnet.

Man erhält das rechtwinklige Dreieck OUP.

Für die Hypotenuse gilt:
$\overline{OP} = 1$

Für die Katheten gilt:
$\overline{OU} = \cos(\alpha + \beta)$ und $\overline{UP} = \sin(\alpha + \beta)$

Durch Projizieren des Punkts P auf den Schenkel des Winkels α erhält man den Punkt R, durch Projizieren von R auf die x-Achse erhält man den Punkt T.

Es gilt: $\cos(\alpha + \beta) = \overline{OT} - \overline{UT} = \overline{OT} - \overline{SR}$

Die Längen $\overline{OR}$, $\overline{OT}$ und $\overline{SR}$ können mithilfe der Dreiecke ORP, OTR und SRP durch α und β ausgedrückt werden:

ΔORP: $\overline{OR} = \cos(\beta)$, $\overline{PR} = \sin(\beta)$
ΔOTR: $\overline{OT} = \cos(\alpha) \cdot \overline{OR} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$
ΔSRP: $\overline{SR} = \sin(\alpha) \cdot \overline{PR} = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Einsetzen in $\cos(\alpha + \beta) = \overline{OT} - \overline{SR}$ ergibt:
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

Aus Abb. 5.4 kann auch eine Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ hergeleitet werden.

Für die entsprechenden Formeln für die Differenzen von Winkeln, $\cos(\alpha - \beta)$ bzw. $\sin(\alpha - \beta)$, kann man $\alpha + \beta$ durch $\alpha + (-\beta)$ ersetzen und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ bzw. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ verwenden.

Eine Formel für $\tan(\alpha + \beta)$ bzw. $\tan(\alpha - \beta)$ kann mithilfe von $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ hergeleitet werden.

All diese Formeln werden zum **ersten Summensatz** zusammengefasst:

Erster Summensatz

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ $\quad$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

Trigonometrische Funktionswerte des doppelten Winkels ($\alpha = \beta$)

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ $\quad$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Merkhilfen:
- $\sin(\alpha \pm \beta)$: „Si-Co-Co-Si“
- $\cos(\alpha \pm \beta)$: „Co-Co-Si-Si“

Es gibt auch eine Formelgruppe für die Summe von Winkelfunktionen von verschiedenen Winkeln, die **zweiter Summensatz** genannt wird:

Zweiter Summensatz

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\quad$ $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\quad$ $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

Die Beweise der Summensätze erfolgen in den Aufgaben 5.87 bis 5.89.

5.70 Ermittle den gesuchten Funktionswert, ohne den Winkel α zu berechnen. AB

a) $\sin(\alpha) = 0{,}3$; $\cos(\alpha) = ?$ **b)** $\cos(\alpha) = 0{,}1$; $\sin(\alpha) = ?$ **c)** $\cos(\alpha) = -0{,}2$; $\tan(\alpha) = ?$

5.71 Berechne mithilfe der Summensätze die exakten Sinus-, Cosinus- bzw. Tangenswerte durch geschicktes Zerlegen der Winkel. Dokumentiere deine Vorgehensweise. BC

a) $\cos(165°)$ **b)** $\sin(75°)$ **c)** $\tan(105°)$ **d)** $\sin(240°)$ **e)** $\cos(300°)$

Aufgaben 5.72 – 5.77: Vereinfache den Term mithilfe von goniometrischen Beziehungen soweit wie möglich.

5.72 **a)** $\cos(\alpha) \cdot \tan(\alpha)$ **b)** $\cos(\alpha + 90°)$ B

Lösung:

a) $\cos(\alpha) \cdot \tan(\alpha) = \cos(\alpha) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \sin(\alpha)$ ● $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

b) $\cos(\alpha + 90°) =$ ● $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$= \cos(\alpha) \cdot \cos 90° - \sin(\alpha) \cdot \sin 90° =$

$= \cos(\alpha) \cdot 0 - \sin(\alpha) \cdot 1 = -\sin(\alpha)$

5.73 B
a) $\sin(\alpha + 90°)$ **c)** $\cos(\alpha + 180°)$ **e)** $\tan(180° - \alpha)$
b) $\sin(\alpha + 270°)$ **d)** $\cos(270° - \alpha)$ **f)** $\tan(\alpha + 45°)$

5.74 B
a) $\sin(x + \pi)$ **c)** $\cos(\pi - x)$ **e)** $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
b) $\sin(\pi - x)$ **d)** $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ **f)** $\tan(x + \pi)$

5.75 B
a) $\frac{\tan(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ **b)** $\frac{\cos(\alpha)}{\cot(\alpha)}$ **c)** $\sin(\alpha) \cdot \cot(\alpha)$

5.76 B
a) $\cos^2(\alpha) \cdot (1 + \tan^2(\alpha))$ **b)** $\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}}$ **c)** $\frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\tan(\alpha)}$

5.77 B
a) $\tan(\alpha) + \cot(\alpha)$ **c)** $\sin(2\alpha) \cdot \tan(\alpha) + \cos(2\alpha)$ **e)** $\cos(2\alpha) + 1$
b) $(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2$ **d)** $\frac{2 \cdot \sin^2(\alpha)}{\sin(2\alpha)}$ **f)** $\frac{1 + \cos(2\alpha)}{\cos(\alpha)}$

5.78 Vereinfache mithilfe des zweiten Summensatzes. B

a) $\frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}{\cos(\alpha) + \cos(\beta)}$ **b)** $\frac{\sin(3\alpha) + \sin(\alpha)}{4 \cdot \cos^2(\alpha)}$ **c)** $\frac{\cos(3\alpha) - \cos(\alpha)}{4 \cdot \sin^3(\alpha)}$

Aufgaben 5.79 – 5.81: Zeige die Richtigkeit der Aussagen.

BD **5.79** Zeige: $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)$

Lösung:

$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2 \cdot \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{3} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2}\right) =$

- 2. Summensatz: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ mit $\alpha = x + \frac{\pi}{3}$, $\beta = x - \frac{\pi}{3}$

$= 2 \cdot \cos\left(\frac{2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \frac{\pi}{3}}{2}\right) =$

- Zusammenfassen und Vereinfachen

$= 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{2} = \cos(x)$

BD **5.80** **a)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(x)$ **b)** $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$

BD **5.81** **a)** $\sqrt{2} \cdot \cos(45° - \alpha) = \sin(\alpha) + \cos(\alpha)$ **b)** $-\sqrt{2} \cdot \sin(45° - \alpha) = \sin(\alpha) - \cos(\alpha)$

B **5.82** **a)** Stelle nur mit $\sin(\alpha)$ dar: $\cos(\alpha) + \frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$ **b)** Stelle nur mit $\cos(\alpha)$ dar: $\frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} - \cos(\alpha)$

ABC **5.83** Ein Lichtstrahl, der aus einem optischen Medium unter einem Winkel α auf die Grenzfläche zu einem anderen optischen Medium trifft, wird unter einem Winkel β gebrochen, dessen Größe von der Art des Materials abhängt. Es gilt das Brechungsgesetz:

$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ n_1, n_2 ... materialabhängige Brechzahlen

1) Wie groß muss α sein, damit beim Übergang eines Lichtstrahls von Luft ($n_1 = 1$) zu Plexiglas ($n_2 = 1{,}5$) der Brechungswinkel $\alpha = 2\beta$ beträgt?

2) Welche Werte darf n_2 annehmen, damit $\alpha = 2\beta$ beim Übergang eines Lichtstrahls von Luft in ein anderes Medium möglich ist?

AB **5.84** Eine Person mit Aughöhe a betrachtet einen Fahnenmast der Höhe H aus der Entfernung d. Drücke den Sehwinkel ε mithilfe der Größen a, d und H aus.
Hinweis: Gib $\tan(\alpha)$ und $\tan(\beta)$ an und verwende einen Summensatz.

AB **5.85** Ein Gegenstand wird unter dem Höhenwinkel α gesehen und vom selben Standort aus ein zweiter Gegenstand unter einem doppelt so großen Höhenwinkel.

1) Gib das Verhältnis der Höhen $h_2 : h_1$ in Abhängigkeit von $\tan(\alpha)$ an.

2) Berechne jenen Winkel α, für den $h_2 : h_1 = 3$ gilt.

BD **5.86** Zeige: **a)** $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2\alpha)]$ **b)** $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2\alpha)]$ **c)** $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

BD **5.87** Zeige die Richtigkeit des ersten Summensatzes für den gegebenen Term (siehe S. 148).
a) $\sin(\alpha + \beta)$ **b)** $\sin(\alpha - \beta)$ **c)** $\cos(\alpha - \beta)$ **d)** $\tan(\alpha + \beta)$

BD **5.88** Zeige mithilfe des ersten Summensatzes:
a) $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$ **b)** $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$

BD **5.89** Zeige unter Verwendung des ersten Summensatzes den zweiten Summensatz für:
a) $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$ **b)** $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ **c)** $\sin(\alpha) - \sin(\beta)$ **d)** $\cos(\alpha) - \cos(\beta)$
Hinweis: Verwende $\alpha = \alpha' + \beta'$ und $\beta = \alpha' - \beta'$.

5.4 Allgemeine Winkelfunktionen

5.4.1 Allgemeine Sinusfunktion

Springt jemand gleichmäßig auf einem Trampolin und zeichnet man die Höhe der Füße in Abhängigkeit von der Zeit auf, so erhält man annähernd eine Sinusfunktion. Die Höhe und die Periode dieser Sinusfunktion hängen davon ab, wie hoch und wie schnell gesprungen wird. Man spricht von einer **allgemeinen Sinusfunktion**.

Bei der Darstellung der Sinusfunktion sind wir von einem Punkt P ausgegangen, der am Einheitskreis „entlang läuft". Geht man nun davon aus, dass der zugehörige Winkel φ den Kreis mit der **Winkelgeschwindigkeit** ω überstreicht, kann die zu P gehörige y-Koordinate zu jedem beliebigen Zeitpunkt ermittelt werden. Man erhält eine Funktion, die von der Zeit t abhängt. Viele periodische Vorgänge können so durch eine Sinusfunktion beschrieben werden.

5.90 Zeichne $y = \sin(x)$ und folgende Funktionen im Bereich $-2 \leqslant x \leqslant 4$.
1) $y_1(x) = 2 \cdot \sin(x)$ **2)** $y_2(x) = \sin(3x)$ **3)** $y_3(x) = \sin(x + 1)$
Vergleiche sie jeweils mit dem Graphen von $y = \sin(x)$ und beschreibe die Unterschiede mit eigenen Worten.

BCD

Wie schon bei der quadratischen Funktion und der Exponentialfunktion wollen wir die Auswirkungen von Änderungen der Funktionsgleichung durch Vergleichen mit der ursprünglichen Funktion $y = \sin(x)$ untersuchen.

- **$y = a \cdot \sin(x)$**

ZB: $a = 2$: Die Funktionswerte werden verdoppelt.
$a = \frac{1}{2}$: Die Funktionswerte werden halbiert.
$a = -1$: Die Funktionswerte wechseln das Vorzeichen.

Die Multiplikation mit a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung, je nachdem, ob $|a| > 1$ oder $|a| < 1$ ist. Ist a negativ, so wird der Graph an der x-Achse gespiegelt. Die Periode ändert sich dabei nicht.
$|a|$ heißt **Amplitude**. Sie kann an jeder Maximum- bzw. Minimumstelle abgelesen werden.

- **$y = \sin(b \cdot x)$**

Man vergleicht den Funktionsgraphen mit jenem von $y = \sin(x)$ zum Beispiel an Stellen, die Vielfache von π sind.

ZB: $b = 2$: $\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi)$
Beim halben x-Wert wird bereits derselbe Wert wie bei $y = \sin(x)$ erreicht. Die neue Periode ist π.

Der Parameter b wird **Kreisfrequenz** genannt.

Die Multiplikation des Arguments x mit einem Faktor bewirkt eine Änderung der Periode p:
$y = \sin(x)$ hat die Periode $p = 2\pi$.
$y = \sin(b \cdot x)$ vollendet genau dann eine volle Periode, wenn $b \cdot x = 2\pi$ ist, also ist $x = \frac{2\pi}{b}$.
Für die Periode von $\sin(b \cdot x)$ gilt daher: $p = \frac{2\pi}{b}$
Ist $|b| < 1$, so wird der Graph in x-Richtung **gestreckt**, ist $|b| > 1$, so wird er **gestaucht**.
Für $b < 0$ erfolgt eine **Spiegelung** an der y-Achse.

Mit der Veränderung der Periode verlagern sich auch die Nullstellen der Funktion:
$\sin(b \cdot x) = 0$, wenn $b \cdot x = k \cdot \pi \;\Rightarrow\; x = \frac{k\pi}{b}, k \in \mathbb{Z}$

- **y = sin(x + c)**

c bewirkt eine Verschiebung der Sinuskurve längs der x-Achse, die auch **Phasenverschiebung** genannt wird.

Diese Verschiebung erhält man durch Berechnung jenes Punkts, der dem Punkt $N_0(0|0)$ von $y = \sin(x)$ entspricht. Diesen erhält man durch Berechnung der Nullstelle:
$\sin(x + c) = 0$ mit $x + c = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = -c$
Ist c positiv, so erfolgt die Verschiebung nach links, bei negativem c nach rechts.
ZB: $y = \sin(x + 1)$: $x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = -1$, $y = \sin(x)$ wurde um 1 nach links verschoben
$y = \sin(x - 2)$: $x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = +2$, $y = \sin(x)$ wurde um 2 nach rechts verschoben
Für alle weiteren Nullstellen gilt: $\sin(x + c) = 0 \;\Rightarrow\; x + c = k\pi \;\Rightarrow\; x = k\pi - c$, mit $k \in \mathbb{Z}$

- **y = a · sin(b · x + c)**

ZB: $y = 3 \cdot \sin(4x - 2)$
$a = 3 \;\Rightarrow\;$ Streckung in y-Richtung
$b = 4 \;\Rightarrow\;$ Periode $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Nullstellen:
N_0: $3 \cdot \sin(4x - 2) = 0$ mit $4x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{1}{2}$
Die Verschiebung kann durch Herausheben von b auch direkt abgelesen werden: $y = 3 \cdot \sin\left(4\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$
Der Abstand zwischen zwei Nullstellen beträgt eine halbe Periode: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \ldots; \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \ldots$
Allgemein $N_k(x_k|0)$: $bx + c = 0$, Abstand $\frac{p}{2} \;\Rightarrow\; x_k = -\frac{c}{b} + \frac{k\pi}{b} = \frac{k\pi - c}{b}, k \in \mathbb{Z}$

Die Funktion $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ heißt **allgemeine Sinusfunktion**.
Sie hat den Wertebereich $[-a; a]$, die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ und eine Nullstelle bei $x_0 = -\frac{c}{b}$.

Bemerkung: Ist eine Funktion in der Form $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ gegeben, dann bewirkt d eine Verschiebung in y-Richtung. Oft wird auch diese Form als allgemeine Sinusfunktion bezeichnet.

Technologieeinsatz: Allgemeine Winkelfunktionen

TI-Nspire

Mithilfe des TI-Nspire ist es möglich, die Veränderung der Graphen von Winkelfunktionen dynamisch darzustellen, wenn ein oder mehrere Parameter der Funktionsgleichung variieren.

GeoGebra: www.verlaghpt.at

5.91 Stelle die allgemeine Winkelfunktion $y = a \cdot \sin(b \cdot x)$ im Intervall $[0; 4\pi[$ so grafisch dar, dass die Werte von a im Intervall [0; 3] und die Werte von b in [0; 5] variieren. Dokumentiere deine Vorgehensweise und interpretiere die Darstellung.

BC

Lösung:

Zuerst werden in einem Grafikfenster die gewünschten Fenstereinstellungen gewählt und die Funktion y eingegeben.

Im Menü **1: Aktionen**, **B: Schieberegler einfügen** kann man einen Schieberegler einfügen, mithilfe dessen man zum Beispiel die Werte für a variieren kann. Dazu gibt man im Schiebereglerfeld die gewünschte Variable und die Grenzen an.

Genauso verfährt man auch für die Variable b.

Sind beide Variablen auf diese Weise festgelegt, erscheint der Funktionsgraph. Man kann nun durch Greifen und Verschieben der Regler im Schiebereglerfeld den Funktionsgraphen verändern.

Man erkennt:

Durch Verändern von a wird die Kurve in y-Richtung gestreckt bzw. gestaucht. Lässt man b variieren, erfolgt die Streckung bzw. Stauchung in x-Richtung.

5.92 Stelle die Funktion $y = 5 \cdot \sin(2x - 4)$ grafisch dar und ermittle jene Nullstelle, die der Nullstelle $N_0(0|0)$ der Sinusfunktion $y = \sin(x)$ entspricht. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

BC

Lösung:

Da $c = -4$ ist, wird die Kurve nach rechts verschoben.

Die Nullstelle, die $N_0(0|0)$ entspricht, ist die „zweite" Nullstelle rechts von der y-Achse.

Im Menü **6: Graph analysieren**, **1: Nullstelle** kann man eine untere Schranke und eine obere Schranke wählen, zwischen denen die Nullstelle ermittelt wird.

Die Nullstelle ist $x = 2$.

5.93 Stelle die Funktionen im Intervall $[-\pi; 4\pi]$ grafisch dar. Vergleiche sie und beschreibe anhand der Funktionsgleichungen, wie sich die Graphen voneinander unterscheiden.

BC

a) 1) $y = \sin(x)$ ***2)*** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ***3)*** $y = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ***4)*** $y = 2 \cdot \sin\left(0{,}5 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) 1) $y = -\sin(x)$ ***2)*** $y = -\sin(2x)$ ***3)*** $y = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ***4)*** $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

ABC **5.94** Ermittle die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen.

Lösung:
$y = a \cdot \sin(bx + c)$
$a = 5$
$p = 6\pi$: $\frac{2\pi}{b} = 6\pi \Rightarrow b = \frac{1}{3}$
$N_0(\pi|0)$: $\frac{1}{3}\pi + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{\pi}{3}$
Funktionsgleichung: $y = 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}(x - \pi)\right)$

- Die Amplitude hat den Wert 5.
- $p = \frac{2\pi}{b}$
- N_0 ... $bx + c = 0$

BC **5.95** Zeichne die Graphen der Funktionen $y_1 = 2{,}5 \cdot \sin(2x + 3)$ und $y_2 = 2{,}5 \cdot \sin(2x + 3) - 1$, ohne eine Wertetabelle zu erstellen. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung:

y_1: Aus der Funktionsgleichung ergibt sich:
$a = 2{,}5$, $b = 2$, $c = 3$
Zuerst berechne ich die Periode:
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
Eine Nullstelle erhalte ich durch:
$2x + 3 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{3}{2} = -1{,}5$
Die weiteren Nullstellen ergeben sich durch fortlaufende Addition der halben Periode.
$x_1 = -1{,}5 + \frac{\pi}{2} \approx 0{,}07$, $x_2 = -1{,}5 + \pi \approx 1{,}64$
Die Maxima und Minima befinden sich in der Mitte zwischen je zwei Nullstellen.

y_2: Da sich y_2 nur um den Summanden (-1) von y_1 unterscheidet, verschiebe ich den Graphen von y_1 um eine Einheit nach unten.

Vergleicht man die Graphen von $y = \cos(x)$ und $y = \sin(x)$, so lässt sich erkennen, dass die **Cosinusfunktion** einer um $\frac{\pi}{2}$ in negativer Richtung verschobenen Sinusfunktion entspricht: $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Jede Cosinusfunktion lässt sich als verschobene Sinusfunktion darstellen.

Es gilt: $\cos(b \cdot x + c) = \sin\left(b \cdot x + c + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{c}{b} + \frac{\pi}{2b}\right)\right)$

Da die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ beträgt, entspricht das Verschieben um ein Viertel dieser Periode einer Verschiebung um $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2b}$.

zB: $5 \cdot \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 5 \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot \sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$

Harmonische Schwingungen

Eine praktische Anwendung der allgemeinen Sinusfunktion ist die Beschreibung von Schwingungen, wie sie zum Beispiel in der Mechanik, in der Optik oder bei Wechselströmen auftreten. Ist das Weg-Zeit-Diagramm einer Schwingung eine allgemeine Sinuskurve, so heißt die Schwingung **harmonische Schwingung** oder **Sinusschwingung**. Die Gleichung der allgemeinen Sinusschwingung schreibt man dann meist in der Form $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Bei einer Schwingung sind folgende Größen von Bedeutung:

- **Amplitude** A: Maximalwert, zum Beispiel die maximale Auslenkung
- **Periodendauer** T (in s): Dauer einer vollen Schwingung bzw. Periode der Sinusfunktion
- **Frequenz** $f = \frac{1}{T}$ (in Hertz Hz bzw. in s^{-1}): Anzahl der Schwingungen pro Sekunde
- **Kreisfrequenz** ω (in s^{-1}), $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: Winkelgeschwindigkeit
- **Nullphasenwinkel** φ: Winkel zum Zeitpunkt t = 0 s

Zur Veranschaulichung einer Schwingung wird oft ein **Zeigerdiagramm** verwendet:

Die Schwingung wird als rotierender **Zeiger** (Ortsvektor) dargestellt. Dieser Zeiger hat die Länge A und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn um den Nullpunkt. Der Zeiger der Schwingung $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ schließt zum Zeitpunkt t = 0 s den Nullphasenwinkel φ mit der x-Achse ein. Die Auslenkung der Schwingung ist dann zum Zeitpunkt t = 0 s nicht null, sondern $y(0\,s) = A \cdot \sin(\varphi)$.

Die **Nullstelle** t_0 und damit die **Phasenverschiebung** erhält man mit: $\omega \cdot t + \varphi = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

Harmonische Schwingung bzw. **Sinusschwingung**:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

A ... Amplitude; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ... Kreisfrequenz; T ... Periodendauer; φ ... Nullphasenwinkel

5.96 Gib den Wertebereich der Funktion an. C

a) $y = 3 \cdot \sin(x)$ **b)** $y = -2 \cdot \sin(x)$ **c)** $y = 0{,}5 \cdot \sin(x) + 2$ **d)** $y = -\sin(x) + 1$

5.97 Gib die Periode(ndauer) an. C

a) $y = \sin(3x)$ **b)** $y = \sin\left(\frac{x}{6}\right)$ **c)** $y = \sin\left(4\,\frac{1}{s} \cdot t\right)$ **d)** $y = \sin\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s} \cdot t\right)$

5.98 Beschreibe, wie du die Funktionsgleichung des Graphen ermitteln kannst und gib sie an. AC

a) Die Funktionswerte sind gegenüber y = sin(x) vervierfacht.
b) Die Funktionswerte betragen $\frac{1}{10}$ von y = sin(x).
c) Die Funktionswerte sind gegenüber y = sin(x) negativ und verdoppelt.

A **5.99** Gib die entstehende Funktionsgleichung als Sinusfunktion an.

a) Verschiebung der Sinuskurve um 2 nach rechts

b) Verschiebung der Sinuskurve um $\frac{\pi}{2}$ nach links

c) Streckung der Sinuskurve in y-Richtung auf das Doppelte und Verschiebung um 1 nach links

d) Stauchung der Sinuskurve in y-Richtung auf ein Viertel und Verschiebung um π nach rechts

e) Spiegelung der Sinuskurve um die waagrechte Achse und Verschiebung um den Wert der Amplitude entlang der y-Achse nach unten

AB **5.100** Gib die Gleichung der Sinusfunktion bzw. der harmonischen Schwingung mit $\varphi = 0$ an. (A ... Amplitude, f ... Frequenz, p ... Periode, T ... Periodendauer)

a) $A = 2;\ p = \pi$
b) $A = 150\ \Omega;\ f = 72$ Hz
c) $A = 4;\ p = \frac{\pi}{3}$
d) $A = 12{,}5$ cm; $T = 0{,}4$ s
e) $A = 0{,}5;\ p = 4\pi$
f) $A = 0{,}2$ mA; $T = 10$ ms

CD **5.101** Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antworten und stelle falsche Aussagen richtig.

1) Die Funktion $y = 4 \cdot \sin(x)$ hat die Periodenlänge 8π.

2) Die Funktion $y = \sin(2x - 1)$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = 1$.

3) Die Funktionen $y_1 = 3 \cdot \sin(x)$ und $y_2 = \sin(x + 3)$ haben dieselbe Periode.

4) $y_1 = \sin(2x)$ und $y_2 = 2 \cdot \sin(x)$ haben denselben Wertebereich.

5) Der Funktionsgraph von $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ kann durch die Verschiebung des Graphen der Funktion $y = \sin(x)$ um $\frac{\pi}{4}$ nach links oder durch die Verschiebung des Koordinatenssystems um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts dargestellt werden.

Aufgaben 5.102 – 5.104: Ermittle jeweils die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen und gib sie als Sinusfunktion an. Beschreibe mit eigenen Worten, wodurch sich der Funktionsgraph von der Sinuskurve unterscheidet.

ABCD **5.102** **a)** **b)**

ABCD **5.103** **a)** **b)**

ABCD **5.104** **a)** **b)**

5.105 Schreibe die Funktion als Sinusfunktion an. B

a) $y = 4 \cdot \cos(x)$ **b)** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **c)** $y = 3 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

5.106 Stelle das Zeigerdiagramm der Schwingung dar. B

a) $y(t) = 5\text{ cm} \cdot \sin\left(1\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $u(t) = 8\text{ V} \cdot \sin\left(3\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$

Aufgaben 5.107 – 5.108: Ermittle jeweils die Funktionsgleichung des dargestellten Graphen und gib sie als Sinusfunktion an.

5.107 **a)** **b)** ABC

5.108 **a)** **b)** ABC

5.109 Stelle die Graphen der dargestellten Funktionen mithilfe von Technologieeinsatz dar. ABC TE

5.110 Ein erwachsener Mensch macht, wenn er sich in Ruhe befindet, 10 bis 20 Atemzüge pro Minute. (Ein Atemzug entspricht ein- und ausatmen.) Dabei atmet er jeweils rund 0,5 Liter Luft ein und wieder aus. Das Luftvolumen in der Lunge ändert sich dabei annähernd sinusförmig. ABC TE

1) Gib die Funktionsgleichung des eingeatmeten Luftvolumens abhängig von der Zeit an, wenn 15 Atemzüge pro Minute gemacht werden. Beachte, dass das Luftvolumen nicht negativ sein kann.

2) Stelle den Graphen der Funktion für $0\text{ s} \leq t \leq 30\text{ s}$ dar.

3) Welche Größen der Funktionsgleichung ändern sich bei der Beschreibung des eingeatmeten Lungenvolumens eines **a)** laufenden, **b)** schlafenden Menschen?

AB **5.111** Der Stundenzeiger einer Uhr hat eine Länge von 7 cm, der Minutenzeiger ist 11 cm lang. Denk dir die waagrechte Achse durch den Mittelpunkt der Uhr gelegt.

1) Gib für den Stundenzeiger und den Minutenzeiger jeweils die Funktion an, die die Höhe der Zeigerspitze, abhängig von der Zeit in Stunden, angibt.

2) Stelle die in ***1)*** ermittelten Funktionen für ein Intervall von 12 Stunden grafisch dar.

AB **5.112** Wechselt eine Spannung bzw. ein Strom regelmäßig die Polarität und damit die „Richtung", spricht man von Wechselspannung bzw. Wechselstrom.
Eine sinusförmige Wechselspannung hat eine Frequenz von f = 50 Hz und einen maximalen Spannungswert û = 100 V.

1) Berechne die Periodendauer T und die Kreisfrequenz der Wechselspannung.

2) Ermittle die Funktionsgleichung der Wechselspannung und stelle sie grafisch dar.

3) Berechne die Beträge der momentanen Spannungen u(t) zu den Zeitpunkten t_1 = 1 ms, t_2 = 25 ms und t_3 = 50 ms.

ABCD **5.113** Auf dem Netzgerät eines Laptops steht zu lesen: *„INPUT: 100-240 V~1,5 A 50-60 Hz"*

1) Erkläre, welche Bedeutung diese Werte haben.

2) Stelle die Funktionsgraphen von Wechselspannung und Wechselstrom mithilfe von Technologieeinsatz grafisch dar.

3) Recherchiere, ob das Gerät auch in den USA funktioniert.

AB **5.114** Ein schwingendes Federpendel befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 s in Ruhelage. Es hat eine Amplitude von 10 cm und eine Periodendauer von vier Sekunden. Gib die Funktionsgleichung an und stelle die Schwingung grafisch dar.

5.4.2 Überlagerung von Schwingungen

CD **5.115** In den Abbildungen 5.5 und 5.6 ist die Summe zweier Sinusfunktionen dargestellt.

1) Wie hängt die Amplitude der Summenfunktion von jenen der einzelnen Funktionen ab?

2) Was kann man über die Periode der Summenfunktion aussagen?

$y_1 = \sin(t)$, $y_2 = 2 \cdot \sin(t)$

Abb. 5.5

$y_1 = 2 \cdot \sin(t)$, $y_2 = 1{,}5 \cdot \sin(t + \pi)$

Abb. 5.6

Im naturwissenschaftlichen Unterricht hast du vielleicht schon gelernt, dass die Summe zweier Sinusschwingungen mit gleicher Frequenz wieder eine Sinusschwingung mit dieser Frequenz ist. Um dies zu zeigen und die neue Amplitude sowie den Nullphasenwinkel zu berechnen, verwenden wir ein **Zeigerdiagramm**.

Eine Sinusschwingung mit der Funktionsgleichung $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ wird dabei durch einen Zeiger dargestellt, der die Länge A hat und der mit der waagrechten Achse eines Koordinatensystems den Winkel φ einschließt.

Wir gehen von $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ aus und stellen diese beiden Schwingungen für den Zeitpunkt t = 0 s in Form eines Zeigerdiagramms dar.

ZB: $y_1 = 2\text{ cm} \cdot \sin\left(2\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$, $y_2 = 3\text{ cm} \cdot \sin\left(2\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$

- Die Summe der Schwingungen wird durch vektorielle Addition der Zeiger dargestellt. Beide Schwingungen haben die gleiche Kreisfrequenz ($\omega = 2\text{ s}^{-1}$), daher bleibt das von beiden Zeigern aufgespannte Parallelogramm bei der Drehung unverändert.
- Die Länge der rot gezeichneten Resultierenden A entspricht der Amplitude von $y_1 + y_2$ und kann mithilfe des Cosinussatzes berechnet werden:
  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cdot \cos(\alpha) =$
  $= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cdot \cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$
- $\cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 4{,}836...\text{ cm}$
- Mithilfe der hellgrün eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecke kann der Winkel φ berechnet werden. Es gilt: $u = A_1 \cdot \cos(\varphi_1)$, $v = A_2 \cdot \cos(\varphi_2)$, $w = A_1 \cdot \sin(\varphi_1)$, $z = A_2 \cdot \sin(\varphi_2)$
  $\Rightarrow \tan(\varphi) = \frac{w + z}{u + v} = \frac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)} = 1{,}113... \Rightarrow \varphi = 0{,}838...\text{ rad } (\approx 48{,}1°)$
- Für die resultierende Schwingung gilt: $y = y_1 + y_2 = 4{,}836...\text{ cm} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t + 0{,}838...)$

Die Summe zweier Sinusschwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ mit gleicher Frequenz ist wieder eine Sinusschwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit der gleichen Frequenz. Für die Amplitude und den Nullphasenwinkel gilt:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},\quad \tan(\varphi) = \frac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)}$$

5.116 Schreibe die Summe der Funktionen y_1 und y_2 in der Form $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ an.

B

$y_1 = 3\text{ cm} \cdot \sin\left(3\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$, $y_2 = 4\text{ cm} \cdot \cos(3\text{ s}^{-1} \cdot t)$

Lösung:

$y_2 = 4\text{ cm} \cdot \sin\left(3\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$ — ● y_2 als Sinusfunktion angeben

$A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = 6{,}766...\text{ cm}$ — ● Amplitude der Überlagerung berechnen

$\tan(\varphi) = \frac{3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 4{,}398... \Rightarrow \varphi = 1{,}347...\text{ rad}$ — ● Nullphasenwinkel berechnen

$y = 6{,}77\text{ cm} \cdot \sin(3\text{ s}^{-1} \cdot t + 1{,}35)$ — ● Resultierende Schwingung

Die Summe zweier Sinusschwingungen mit verschiedenen Frequenzen ist eine periodische Funktion, aber im Allgemeinen keine Sinusschwingung.
ZB: $y_1 = 2 \cdot \sin(t)$, $y_2 = \sin(3t)$
Die Überlagerung von Schwingungen, deren Frequenzen Vielfache einer Grundfrequenz sind, ermöglicht das Darstellen periodischer Funktionen als Summe von Winkelfunktionen (siehe Fourier-Reihen, Band 4).

$y_1 = 2 \cdot \sin(t)$, $y_2 = \sin(3t)$, $y = y_1 + y_2$

B **5.117** Stelle die Summe der beiden Sinusfunktionen im Bereich $[-\pi; 3\pi]$ grafisch dar. Zeichne dazu die beiden gegebenen Graphen und anschließend den Graphen der Summe durch Addition der Funktionswerte (vgl. Abb. 5.5 und 5.6, Seite 158).

a) $y_1 = \sin(x),\ y_2 = 2 \cdot \sin(x)$
b) $y_1 = 3 \cdot \sin(2x + \pi),\ y_2 = -\sin(2x)$
c) $y_1 = 2 \cdot \sin(x + \pi),\ y_2 = 0{,}5 \cdot \sin(x)$
d) $y_1 = 2 \cdot \cos(x),\ y_2 = \sin(x)$

B **5.118** Stelle die Sinusschwingungen als Zeigerdiagramm dar und ermittle ihre Summe.

a) $y_1 = 1\text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{t}{s}\right),\ y_2 = 2\text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{t}{s} + \frac{\pi}{6}\right)$
b) $y_1 = 1\text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{t}{s}\right),\ y_2 = 3\text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{t}{s}\right)$
c) $y_1 = 5\text{ V} \cdot \sin\left(2\,\frac{1}{s} \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right),\ y_2 = 3\text{ V} \cdot \sin\left(2\,\frac{1}{s} \cdot t\right)$
d) $y_1 = -1\text{ V} \cdot \sin\left(3\,\frac{1}{s} \cdot t\right),\ y_2 = 1{,}5\text{ V} \cdot \sin\left(3\,\frac{1}{s} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$

BCD **5.119** Zeige anhand einer Zeichnung, dass

a) bei gleicher Phasenverschiebung $A = A_1 + A_2$ gilt.
b) bei einem Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$ gilt: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

TE

Technologieeinsatz: Überlagerung von Schwingungen

GeoGebra

TI-Nspire: www.verlaghpt.at

Zwei Schwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ mit verschiedenen Frequenzen f_1 und f_2, die sich nur geringfügig voneinander unterscheiden, werden überlagert. Es entsteht eine so genannte **Schwebung**. Schwebungen treten häufig in der Wellenlehre, besonders bei Schallwellen auf.

ZB: Wir wählen jeweils eine Amplitude von A = 2 Einheiten sowie die Frequenzen $f_1 = 12$ Hz und $f_2 = 13$ Hz und stellen die resultierende Schwingung grafisch dar.

Die beiden Funktionen werden in die Eingabezeile eingegeben. Da die Winkelgeschwindigkeit mit $\omega = 2\pi f$ berechnet wird, lauten die Sinusfunktionen:
f(t)=2*sin(2*Pi*12*t) und **g(t)= 2*sin(2*Pi*13*t)**

Die Schwebung erhält man mittels **s(t)=f(t)+g(t)**. Blendet man f(t) und g(t) aus, sieht man nur mehr den Funktionsgraphen der Schwebung.

Aus physikalischen Gründen, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, ist das An- und Absinken der Amplitude ebenfalls ein periodischer Vorgang, der der **Schwebungsfrequenz** $f_S = |f_1 - f_2|$ folgt.

Die Einhüllende der Schwebung, die zB das „Auf- und Abschwellen" eines Tons beschreibt, kann mithilfe der Modulationskreisfrequenz $\omega_{mod} = \frac{1}{2} \cdot f_S$ angegeben werden.

Die Einhüllende ist gegenüber den Schwingungen um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben, was einer Cosinusfunktion entspricht. Die Amplitude entspricht der Summe der Amplituden der Einzelschwingungen, sie beträgt hier also 2 + 2 = 4 Einheiten.

Damit gilt: **a(t)=4*cos(w*t)** mit **w=0.5*2*Pi*(13–12)**

5.5 Goniometrische Gleichungen

5.120 Auf dem Foto siehst du den Grazer Uhrturm. Die Zeiger der Uhr sind „vertauscht", der kleine Zeiger zeigt die Minuten und der große die Stunden an.

1) Um welche Uhrzeit wurde das Foto aufgenommen?

2) Der Minutenzeiger hat eine Länge von 270 cm. Nimm an, er ist in seiner Mitte befestigt. Wie oft am Tag und wann erreicht seine Spitze eine Höhe von einem Meter über der Mitte der Uhr?

ABC

Eine Gleichung, bei der die gesuchte Variable im Argument einer Winkelfunktion vorkommt, heißt **goniometrische Gleichung**.

Gleichungen der Form sin(x) = c, cos(x) = c und tan(x) = c

sin(x) = c

1. Lösung: $x_1 = \arcsin(c)$

2. Lösung: $x_2 = 180° - x_1$ bzw. $x_2 = \pi - x_1$

Aufgrund der Periodizität ergibt sich:

$x_{k,1} = x_1 + k \cdot 360°$ bzw. $x_{k,1} = x_1 + 2k\pi$

$x_{k,2} = x_2 + k \cdot 360°$ bzw. $x_{k,2} = x_2 + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$

cos(x) = c

1. Lösung: $x_1 = \arccos(c)$

2. Lösung: $x_2 = -x_1$ bzw. $x_2 = 2\pi - x_1$

Aufgrund der Periodizität ergibt sich:

$x_{k,1} = x_1 + k \cdot 360°$ bzw. $x_{k,1} = x_1 + 2k\pi$

$x_{k,2} = x_2 + k \cdot 360°$ bzw. $x_{k,2} = x_2 + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$

tan(x) = c

1. Lösung: $x_0 = \arctan(c)$

Da die Periode der Tangensfunktion 180° bzw. π beträgt, ergeben sich alle weiteren Lösungen durch die fortlaufende Addition von Vielfachen von π:

$x_k = x_0 + k \cdot 180°$ bzw. $x_k = x_0 + k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$

Aufgrund der Periodizität der Winkelfunktionen gibt es unendlich viele Lösungen. Oft wird daher der Bereich, in dem die Lösungen gesucht sind, vorgegeben.

Gleichungen der Form sin(ax + b) = c, cos(ax + b) = c und tan(ax + b) = c

ZB: Die Gleichung sin(ax + b) = c wird durch Substituieren von u = ax + b auf die Gleichung sin(u) = c zurückgeführt:

$\sin(u) = c \Rightarrow u_1 = \arcsin(c)$ und $u_{k,1} = u_1 + 2k\pi$; für u_2 gilt: $u_2 = \pi - u_1$

$$x = \frac{u-b}{a} \Rightarrow x_{k,1} = \frac{\arcsin(c) + 2k\pi - b}{a} = x_1 + k \cdot \frac{2\pi}{a} \text{ und } x_{k,2} = \frac{\pi - \arcsin(c) + 2k\pi - b}{a} = x_2 + k \cdot \frac{2\pi}{a}$$

Für Cosinus und Tangens wird sinngemäß vorgegangen.

B **5.121** Ermittle alle Lösungen aus dem gegebenen Intervall.

a) $\sin(3x) = 0{,}5$; G = [0°; 360°[**b)** $\cos(2x + 1) = 0{,}8$; G = [0; 2π[

Lösung:

a) $\sin(3x) = 0{,}5$; $u = 3x$ • Substitution

$\sin(u) = 0{,}5$

$u_1 = \arcsin(0{,}5) = 30°$ • Anwenden der Arcusfunktion

$u_2 = 180° - 30° = 150°$ • 2. Lösung

$x_1 = 10°, x_2 = 50°$ • Rücksubstitution: $x = \frac{u}{3}$

$x_{1,1} = 10° + \frac{360°}{3} = 10° + 120° = 130°$ • Weitere Lösungen ergeben sich durch mehrfache Addition der entsprechenden Periode von $p = \frac{360°}{3} = 120°$.

$x_{1,2} = 10° + 2 \cdot 120° = 250°$

$x_{2,1} = 50° + 120° = 170°$

$x_{2,2} = 50° + 2 \cdot 120° = 290°$

$L = \{10°; 50°; 130°; 170°; 250°; 290°\}$

b) $\cos(2x + 1) = 0{,}8$; $u = 2x + 1$ • Substitution

$\cos(u) = 0{,}8$

$u_1 = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}644$ • Anwenden der Arcusfunktion

$u_2 = -u_1 \approx -0{,}664$ • 2. Lösung

$x_1 = \frac{u_1 - 1}{2} \approx -0{,}178 \quad x_2 = \frac{u_2 - 1}{2} \approx -0{,}822$ • Rücksubstitution: $x = \frac{u - 1}{2}$

$x_{1,1} = \frac{(u_1 + 2\pi) - 1}{2} \approx 2{,}963$; $x_{1,2} = \frac{(u_1 + 4\pi) - 1}{2} \approx 6{,}105$ • Addition der Periode 2π

$x_{1,2} = \frac{(u_2 + 2\pi) - 1}{2} \approx 2{,}320$; $x_{2,2} = \frac{(u_2 + 4\pi) - 1}{2} \approx 5{,}461$

$L = \{2{,}320; 2{,}963; 5{,}461; 6{,}105\}$

Gleichungen mit verschiedenen Winkelfunktionen

Beim Lösen solcher Gleichungen wird meist so umgeformt, dass nur eine Art von Winkelfunktion vorkommt.

BC **5.122** Löse die angegebene Gleichung nach x und dokumentiere deine Vorgehensweise.

$2 \cdot \cos(x) = \sin^2(x) + 0{,}25$; G = [0; 2π[

Lösung:

Weil aus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt, dass $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ ist, kann man $\sin^2(x)$ in der Gleichung durch diesen Ausdruck ersetzen:

$2 \cdot \cos(x) = 1 - \cos^2(x) + 0{,}25$

$\cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x) - 1{,}25 = 0$

Durch Substituieren von $u = \cos(x)$ erhält man eine quadratische Gleichung.

$u^2 + 2 \cdot u - 1{,}25 = 0$

$u_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - (-1{,}25)} \Rightarrow u_1 = 0{,}5;\ u_2 = -2{,}5$

Durch Rücksubstitution ergibt sich $\cos(x_1) = 0{,}5$ und $\cos(x_2) = -2{,}5$.

Da die Cosinusfunktion nur für Werte aus dem Intervall [−1; 1] definiert ist, erhält man nur für x_1 Ergebnisse:

$x_1 = \arccos(0{,}5) = \frac{\pi}{3}$, $x_{1,1} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$L = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

5.123 Löse die Gleichung $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ in $\mathbb{R}$. B

Lösung:

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad | : \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 4$

$u = \arctan(4) \approx 1{,}326 \Rightarrow x_0 \approx 2{,}652$

Lösungen: $x_k = 2 \cdot (\arctan(4) + k\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

- $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$
- Substitution: $u = \frac{x}{2}$
- Rücksubstitution: $x = 2u$

Goniometrische Gleichungen mit unterschiedlichen Argumenten

Beim Lösen solcher Gleichungen wird meist auf gleiches Argument bzw. gleiche Winkelfunktion umgeformt. Dazu verwendet man die goniometrischen Beziehungen aus Abschnitt 5.3.

5.124 Gib alle Lösungen der Gleichung $\sin(2x) - \sin(x) = 0$ an. B

Lösung:

$\sin(2x) - \sin(x) = 0$

$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0$

$\sin(x) \cdot (2 \cdot \cos(x) - 1) = 0$

$\sin(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\sin(x) = 0$: $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$ ...

$\cos(x) = \frac{1}{2}$: $x_4 = \frac{\pi}{3}, x_5 = \frac{5\pi}{3}, x_6 = \frac{7\pi}{3}$ ...

Lösungen: $k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

- Anwenden des Summensatzes $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$
- $\sin(x)$ herausheben
- Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist.

Aufgaben 5.125 – 5.126: Löse die Gleichungen in der Grundmenge G = [0; 360°[.

5.125 **a)** $\sin(2x) = 0{,}3$ **b)** $\cos(3x) = 0{,}7$ **c)** $\tan(2{,}5x) = 3{,}5$ **d)** $\sin(1{,}5x) = -0{,}6$ B

5.126 **a)** $\cos(x + 20°) = 0{,}25$ **b)** $\sin(3x - 60°) = -0{,}9$ **c)** $\tan(3x + 210°) = 5$ B

Aufgaben 5.127 – 5.131: Löse die Gleichungen in der Grundmenge G = [0; 2π[.

5.127 **a)** $\sin(2x) = 3$ **b)** $\sin\left(\frac{x}{4}\right) = 0{,}37$ **c)** $\cos(3x) = -0{,}2$ **d)** $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0{,}76$ B

5.128 **a)** $\sin(4x + 3) = 0{,}4$ **b)** $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}5$ **c)** $\cos(3x + 2) = -0{,}7$ B

5.129 **a)** $\sin(x) = \cos(x)$ **b)** $\sin(x) = \tan(x)$ **c)** $2 \cdot \sin(x) - 3 \cdot \cos(x) = 0$ B

5.130 **a)** $5 \cdot \cos(3x) = 2 \cdot \sin(3x)$ **b)** $2 \cdot \sin(0{,}5x) = \cos(0{,}5x)$ **c)** $6 \cdot \sin(2x) + \tan(2x) = 0$ B

5.131 **a)** $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0{,}5$ **b)** $\cos^2(x) = 1 - \sin(x)$ **c)** $2 \cdot \sin^2(x) = 3 \cdot \cos(x) + 3$ B

5.132 Bestimme die Funktionsgleichungen der dargestellten Graphen und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte im Intervall [0; 4π[. AB

a)

b)

B **5.133** Löse die Gleichung in G = [0; 2π[***1)*** rechnerisch, ***2)*** grafisch.
a) cos(2x + 1) = 0,8 ***b)*** sin(2x) – sin(x) = 0

Lösung mit TI-Nspire:

a) 1)

```
solve(cos(2·x+1)=0.8,x)
    x=n1·π−0.821751 or x=n1·π−0.178249
```

```
solve(cos(2·x+1)=0.8,x)|x≥0 and x<2·π
  x=2.31984 or x=2.96334 or x=5.46143 or x=▸
```

Die Gleichung wird mit dem Befehl **solve** gelöst. Da es unendlich viele Lösungen gibt, wird eine allgemeine Lösung mithilfe eines Platzhalters angegeben. **n1** steht für eine beliebige ganze Zahl. Die Nummerierung (**n1**, **n2**, ...) wird automatisch fortlaufend vergeben.

Der Lösungsbereich kann durch die Angabe von Bedingungen eingeschränkt werden. Diese Bedingungen werden beim **solve**-Befehl nach einem WITH-Operator (vertikale Linie) eingegeben.
Man erhält diesen Operator über ctrl = mithilfe eines Dialogfelds.

>	<	≠
≥	≤	|

L = {2,320; 2,963; 5,461; 6,105}

2)

Die Funktionen **f1(x)=cos(2x+1)** und **f2(x)=0.8** werden im Bereich **XMin:–1** und **XMax:2π** dargestellt. Über Menü, **6: Graph analysieren**, **4: Schnittpunkt** können die Schnittpunkte ermittelt werden. Dabei muss der Bereich mittels Schranken eingegrenzt werden.

b) 1)

```
solve(sin(2·x)−sin(x)=0,x)|x≥0 and x<2·π
  x=0. or x=1.0472 or x=3.14159 or x=5.2359▸
```

Die Gleichung wird mithilfe von **solve** und der Bereichseingabe gelöst.
L = {0; 1,047; π; 5,236}

2) 1. Möglichkeit:
Die Gleichung kann auf sin(2x) = sin(x) umgeformt werden. Die Lösungen sind die Schnittpunkte der beiden Graphen.

2. Möglichkeit:
Der linke Term der Gleichung wird als eine Funktion aufgefasst. Die Lösungen entsprechen deren Nullstellen.

B **5.134** Löse die Gleichung im Bereich G = [0; 2π[***1)*** rechnerisch, ***2)*** grafisch.

a) sin(2x + 1) = 0,3 ***c)*** tan(3x) = 2,5 ***e)*** cos(2x) – cos(x) = 0

b) $\cos\left(\frac{x}{3} - 2\right) = 0{,}7$ ***d)*** tan(x – 2) = –3 ***f)*** $\sin^2(x) = 1$

Zusammenfassung

Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel

Ist $P(x_P|y_P)$ ein Punkt am Einheitskreis und ist α der zum P gehörige Winkel, so gilt für seine Koordinaten: $x_P = \cos(\alpha)$ $y_P = \sin(\alpha)$

Für den Tangens von α gilt: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, $\cos(\alpha) \neq 0$

Eigenschaften der Winkelfunktionen

$y = \sin(x)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1; 1]$, Periode $p = 2\pi$
$\sin(x) = -\sin(-x)$ ... ungerade Funktion

$y = \cos(x)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1; 1]$, Periode $p = 2\pi$
$\cos(x) = \cos(-x)$ ... gerade Funktion, $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \tan(x)$: $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$, $W_f = \mathbb{R}$, Periode $p = \pi$
$\tan(x) = -\tan(-x)$ ... ungerade Funktion

Eigenschaften der Arcusfunktionen

$y = \arcsin(x)$: $D_f = [-1; 1]$, $W_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \arccos(x)$: $D_f = [-1; 1]$, $W_f = [0; \pi]$

$y = \arctan(x)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Berechnungen im allgemeinen Dreieck

Trigonometrische Flächenformel: $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ bzw. $a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$

Cosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Goniometrische Beziehungen

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Erster Summensatz

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Zweiter Summensatz

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Trigonometrie

Allgemeine Sinusfunktion

$y = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-a; a]$, Periode $p = \frac{2\pi}{b}$, eine Nullstelle bei $x_0 = -\frac{c}{b}$

Sinusschwingung

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

A ... Amplitude, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ... Kreisfrequenz, f ... Frequenz,

T ... Periodendauer, φ ... Nullphasenwinkel

Die **Überlagerung von Sinusschwingungen** gleicher Frequenz ist eine Sinusschwingung mit der gleichen Frequenz.

Gleichungen, bei denen die Gleichungsvariable im Argument einer trigonometrischen Funktion steht, heißen **goniometrische Gleichungen**.

Weitere Aufgaben

BC **5.135** **1)** Zeichne einen Einheitskreis (1 Einheit = 3 cm), trage den angegebenen Winkel ein und stelle den Winkelfunktionswert dar.
2) Welches Vorzeichen hat der Winkelfunktionswert des Winkels?
3) Miss den Winkelfunktionswert ab und kontrolliere das Messergebnis mit dem TR.
a) $\sin(25°)$ **b)** $\tan(125°)$ **c)** $\cos(160°)$ **d)** $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ **e)** $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ **f)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

B **5.136** Berechne die Winkel α für $0° \leqslant \alpha < 360°$.
a) $\cos(\alpha) = 0{,}3$ **b)** $\sin(\alpha) = -0{,}8$ **c)** $\tan(\alpha) = 3{,}2$ **d)** $\sin(\alpha) = 0{,}23$

B **5.137** Berechne die Winkel x für $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $\tan(x) = -4{,}5$ **b)** $\cos(x) = -0{,}63$ **c)** $\sin(x) = 0{,}4$ **d)** $\cos(x) = 0{,}31$

Berechnungen in allgemeinen Dreiecken

A **5.138** Arbeite mit dem skizzierten Dreieck.
a) Gib den Cosinussatz zur Berechung der Seite s_1 an.
b) Welche Seite kann mit welchem trigonometrischen Satz berechnet werden, wenn s_1, ω und ε gegeben sind?
c) Wie lautet die Flächenformel, wenn s_1, s_2, φ und ω bekannt sind?
d) Gib den Sinussatz zur Berechnung des Winkels ε an.

s_1 s_2 s_3 φ ω ε

B **5.139** Von einem Dreieck sind die Seitenlängen a = 85 mm und b = 120 mm und der Winkel $\gamma = 70°$ gegeben. Berechne die Seitenlänge c, die Größen der Winkel α und β und den Flächeninhalt.

B **5.140** Von einem Dreieck sind die Winkel $\alpha = 56°$ und $\beta = 30°$ und die Seitenlänge b = 320 cm gegeben. Berechne die Größe des Winkels γ, die fehlenden Seitenlängen und die Höhe h_b.

B **5.141** Von einem Dreieck sind die Seitenlängen b = 4,6 dm und c = 3,4 dm und der Winkel $\gamma = 40°$ gegeben. Berechne die Seitenlänge a und die Größen der Winkel α und β.

B **5.142** Von einem Dreieck sind die Seitenlängen a = 8,5 cm, b = 3,7 cm und c = 10,2 cm gegeben. Berechne die Größen der Winkel α, β und γ und den Flächeninhalt.

B **5.143** Ein Parallelogramm hat die Seitenlängen a = 52 cm und b = 34 cm. Der Winkel zwischen den beiden Seiten beträgt $\alpha = 73°$. Berechne die Längen der Diagonalen e und f, die Höhen und den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Allgemeine Winkelfunktionen

5.144 Gib jeweils alle Winkelfunktionen an, auf die die Aussage zutrifft. C

1) Die Nullstellen der Funktion sind bei $x = 0, \pi, 2\pi$ ...
2) Die Funktion ist im Bereich $]0; \pi[$ streng monoton fallend.
3) Die Funktion ist eine gerade Funktion.
4) An den Stellen $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ... hat die Funktion lokale Maxima.
5) Die Funktion hat den Wertebereich $[-1; 1]$.
6) Die Funktion ist π-periodisch.

5.145 Ordne jeder Aussage die richtige Funktionsgleichung zu. C

A) Die Sinuskurve wird um 1 nach links verschoben und auf das Doppelte in y-Richtung gestreckt.
B) Die Funktionswerte der Sinuskurve werden halbiert und die Periodenlänge verdoppelt.
C) Die Periodenlänge beträgt $\frac{\pi}{2}$ und die „erste“ Nullstelle ist bei $x_0 = \frac{1}{4}$.

1) $y = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ **2)** $y = 2 \cdot \sin(x - 1)$ **3)** $y = \sin(4x - 1)$ **4)** $y = 2 \cdot \sin(x + 1)$

Aufgaben 5.146 – 5.147: Gib die Funktionsgleichung der dargestellten Sinuskurve an.

5.146 **a)** **b)** ABC

5.147 **a)** **b)** ABC

5.148 Zeichne den Graphen der Funktion und beschreibe die Unterschiede zum Graphen von $y = \sin(x)$. BD

a) $y = 4 \cdot \sin(2x)$ **b)** $y = \sin\left(\frac{x}{3} + 2\right)$ **c)** $y = 5 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $y = \sin(3x + \pi)$

TE

Goniometrische Beziehungen

5.149 Veranschauliche die Aussage am Einheitskreis und zeige ihre Gültigkeit mithilfe des 1. Summensatzes. BD

a) $\cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$ **b)** $\sin(270° - \alpha) = -\cos(\alpha)$

5.150 Vereinfache den Ausdruck mithilfe der Summensätze. B

a) $\sin(\alpha + 90°) - \sin(\alpha - 90°)$ **b)** $\cos(\alpha + 90°) + \cos(\alpha - 90°)$

Aufgaben 5.151 – 5.152: Zeige die Richtigkeit der Aussagen.
Hinweis: Schreibe 3α bzw. 4α als $(\alpha + 2\alpha)$ bzw. $(2\alpha + 2\alpha)$ an und wende die Summensätze an.

5.151 **a)** $\sin^3(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin(\alpha) - \sin(3\alpha))$ **b)** $\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) + \cos(3\alpha))$ BD

5.152 **a)** $\sin(4\alpha) = 4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 8 \cdot \sin^3(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ BD
b) $\cos(4\alpha) = 8 \cdot \cos^4(\alpha) - 8 \cdot \cos^4(\alpha) + 1$

Goniometrische Gleichungen

AB **5.153** Wie groß ist der Winkel, dessen Sinuswert doppelt so groß wie der Cosinuswert ist?

Aufgaben 5.154 – 5.157: Löse die Gleichungen in der gegebenen Grundmenge.

B **5.154** **a)** $\cos(3x + 30°) = 0{,}6$; $G = [0°; 360°[$ **b)** $\sin\left(\frac{x}{2} - 4\right) = -0{,}3$; $G = [0; 2\pi[$

B **5.155** **a)** $\cos(x) - 2 \cdot \sin(x) = 1$; $G = [0; 2\pi[$ **b)** $\sin(x) - \cos(x) = 1{,}4$; $G = [0; 2\pi[$

B **5.156** **a)** $\cos(2x) - \cos(x) = 0$; $G = [0; 2\pi[$ **b)** $2 \cdot \sin(x) + \sin(2x) = 0$; $G = [0°; 360°[$

B **5.157** **a)** $\sin(2x) + \cos(x) = 0$; $G = [0; 4\pi[$ **b)** $\cos(2x) = 4 \cdot \sin(x) + 3$; $G = [0; 6\pi[$

Überlagerung von Schwingungen

BC **5.158** Gegeben sind die Sinusfunktionen $y_1(t) = 3 \cdot \sin(2t)$ und $y_2(t) = 1{,}5 \cdot \sin(2t + 1)$.

TE

a) Stelle die Funktion **1)** $y_1(t)$, **2)** $y_2(t)$ grafisch dar. Bestimme Maxima, Minima und Nullstellen und gib die Monotoniebereiche an.

b) Stelle die Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ grafisch dar.

BCD **5.159** Gegeben sind die Sinusfunktionen $y_1(t) = \sin(t)$ und $y_2(t) = 3 \cdot \sin(t)$.

1) Stelle beide Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem in $G = [0; 3\pi]$ grafisch dar.

2) Zeichne zusätzlich jene Schwingung $y(t)$ ein, die durch die Überlagerung der Schwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ entsteht.

Vermischte Aufgaben

BCD **5.160** Die Schwingungen $y_1(t) = \sin(2t)$ und $y_2(t) = \sin\left(2t + \pi\right)$ überlagern einander.

1) Stelle beide Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem in $G = [0; 3\pi]$ grafisch dar.

2) Ermittle die Gleichung der resultierenden Schwingung $y(t)$ mithilfe der Summensätze. Was fällt dir auf? Erkläre, warum die resultierende Schwingung diese Form hat. Bei welchen technischen Anwendungen kann eine solche Überlagerung verwendet werden?

ABCD **5.161** Eine **harmonische Welle** wird durch eine harmonische Schwingung angeregt. Die Gleichung $y = A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$ beschreibt die momentane Auslenkung y eines Teilchens in der Entfernung x vom Erregerzentrum der Welle zum Zeitpunkt t. Die Welle breitet sich mit der Wellengeschwindigkeit c aus. In einem Träger breitet sich eine Welle mit der Amplitude $A = 0{,}2$ m und der Frequenz $f = 0{,}2$ Hz mit $c = 20\,\frac{m}{s}$ aus.

TE

1) Gib die Funktionsgleichung der harmonischen Welle an.

2) Berechne, nach welcher Zeit ein Teilchen im Abstand $x = 20$ m vom Erregerzentrum zu schwingen beginnt und welche Auslenkung y es nach $t = 2$ s hat.

3) Was wird jeweils durch die Gleichung der Welle beschrieben, wenn einerseits die Entfernung x, andererseits die Zeit t einen konstanten Wert hat?
Hinweis: Wähle jeweils einen fixen Wert für x bzw. t und stelle für beide Fälle eine Funktionsgleichung auf und stelle sie grafisch dar. Überlege, von welcher Größe die jeweilige Funktion nun abhängt.

5.162 Zwei Pferde ziehen eine Kutsche. Das eine Pferd zieht mit einer Kraft von $F_1 = 800$ N, das zweite mit einer Kraft von $F_2 = 1{,}2$ kN. In welche Richtung β und mit welcher Kraft wird die Kutsche gezogen, wenn die beiden Zügel einen Winkel von 27° einschließen und $\alpha = 80°$ ist?

AB

5.163 Jemand beobachtet ein Flugzeug unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 75°$ (Aughöhe 1,70 m). Nach zwei Sekunden blickt er erneut nach oben und sieht das Flugzeug unter einem Winkel von $\beta = 85°$. Das Flugzeug fliegt mit einer mittleren Geschwindigkeit von $576\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In welcher Höhe befindet sich das Flugzeug?

AB

5.164 Romeo steht im Hof von Julias Haus und blickt zu Julia hoch, die auf dem Balkon steht. Die Brüstung des Balkons hat eine Höhe von 1,20 m. Romeo sieht das untere Ende unter einem Höhenwinkel von 33,7° und das obere Ende unter 46,8°, seine Aughöhe beträgt 175 cm.

a) In welcher Höhe befindet sich der Balkon?

b) Wie weit ist Romeo vom Haus entfernt, wenn der Balkon 1,50 m auskragt?

c) In welcher Stadt kannst du diesen Balkon tatsächlich sehen?

ABD

5.165 Das Becken eines Hallenbads hat den dargestellten Längsschnitt, mit $\alpha = 2{,}3°$ und $\beta = 65°$. Berechne

1) die größte Tiefe h_1 im Nichtschwimmer-Bereich,

2) die Breite b und die kleinste Tiefe h_2 im Schwimmer-Bereich,

3) das Volumen in Liter, wenn das Becken 12 m breit ist.

4) Ermittle, wie viel Quadratmeter Fliesen notwendig sind, um das Becken damit auszukleiden (ohne Verschnitt).

AB

5.166 Jemand erblickt unter einem Tiefenwinkel α das untere Ende eines 6 m hohen Fahnenmasts. Die Spitze des Masts erscheint unter einem doppelt so großen Höhenwinkel. Wie weit ist die Person vom Mast entfernt, wenn die Aughöhe 1,80 m beträgt?

AB

5.167 Das dargestellte Grundstück soll entlang der Diagonale d in zwei Teile geteilt werden.

1) Berechne die Länge der Diagonale d.

2) Wie viel kosten die entstehenden Grundstücke jeweils, wenn der Preis 150,00 € pro Quadratmeter beträgt?

3) Wie lang ist die Seite s?

a) a = 12,5 m, b = 4,2 m, $\alpha = 83{,}2°$, $\beta = 67{,}1°$, $\gamma = 51{,}0°$

b) a = 23,6 m, b = 5,8 m, $\alpha = 104{,}7°$, $\beta = 53{,}2°$, $\gamma = 37{,}4°$

AB

AB **5.168** Eine Lampe ist an zwei Wänden mit Seilen unter den Winkeln $\alpha = 65°$ und $\beta = 78°$ befestigt.

a) Wie lang sind die beiden Seile s_1 und s_2?

b) Welche Zugkräfte F_1 und F_2 wirken in den Seilen, wenn die Lampe eine Masse von 5 kg hat?

Hinweis: $F_G = m \cdot g$, $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

3,20 m
50 cm
Kräfteplan

ABC **5.169** Ein Fußballspieler zielt bei seinem Schuss in die Mitte des 7,32 m breiten Tors. Der Tormann stellt sich diesem Schuss in den Weg und lenkt den Ball im Abstand a = 9 m vom Spieler ab (siehe Skizze). Um welchen Winkel ε muss er den Ball mindestens ablenken, damit der Ball am Tor vorbei geht?

40 m
20 m
35 m

AB **5.170** Der Biorhythmus eines Menschen ist eine umstrittene Methode, schlechte und gute Tage eines Menschen anzugeben. Nach dieser Theorie laufen diese Tage sinusförmig ab und beginnen bei der Geburt bei Null. Kritische Tage sind immer dann, wenn eine Kurve die Nulllinie schneidet. Der Biorhythmus wird in drei Rhythmen unterteilt, die unterschiedliche Periodendauern haben:

A) Körperlicher Rhythmus: 23 Tage; ***B)*** Emotionaler Rhythmus: 28 Tage;
C) Geistiger Rhythmus: 33 Tage

1) Gib jeweils die Funktionsgleichung für die drei Rhythmen an.

2) Berechne deine heutigen Werte.

3) Ein Tag gilt als besonders kritisch, wenn alle drei Kurven am selben Tag die Nulllinie schneiden. Am wievielten Tag nach der Geburt ist dies der Fall?
Hinweis: Die Funktionen haben Nullstellen im Abstand der halben Periodendauer. Die gemeinsame Nullstelle ist daher ein gemeinsames Vielfaches dieser Zeiten.

AB **5.171** Eine Antenne wird senkrecht auf einem schrägen Dach montiert und zur Sicherung mit drei Seilen befestigt (vgl. Skizze). Die Abmessungen haben folgende Werte:
$h = 1{,}5$ m, $a = 2{,}5$ m, $b = 1{,}8$ m, $c = 2$ m, $\alpha = 60°$, $\varepsilon = 120°$, $\varphi = 125°$

1) In welchen Abständen ℓ_1, ℓ_2 und ℓ_3 voneinander befinden sich die Verankerungen?

2) Wie lang sind die Seile s_1, s_2 und s_3?

3) Welche Fläche wird durch die Verankerungen beansprucht?

ABCD **5.172** Zum Stimmen von Musikinstrumenten werden meist Stimmgabeln verwendet. Deren Frequenzen lassen sich verändern, in dem man an ihnen eine Masse befestigt, wie zum Beispiel eine Büroklammer. Zwei Stimmgabeln mit $f_1 = 440$ Hz und $f_2 = 430$ Hz werden zeitgleich angeschlagen.

1) Stelle beide Schwingungsgleichungen für eine Amplitude von A = 1 mm auf und zeichne sie mithilfe von Technologieeinsatz in ein Koordinatensystem.

2) Überlagere die Schwingungen grafisch und gib die zugehörige Funktionsgleichung an. Um welchen physikalischen Effekt handelt es sich dabei?

3) Präsentiere die Ausarbeitung der Aufgabe in Form eines Referats.

Weitere Aufgaben in den Zusatzheften

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann die Sinus-, Cosinus-, und Tangenswerte des Winkels φ als Längen im Einheitskreis darstellen. A) B) C)	
2	Von einem allgemeinen Dreieck sind folgende Größen gegeben. Welchen Satz kannst du anwenden, um die gesuchte Größe zu berechnen? A) Geg.: b, c, α Ges.: a B) Geg.: a, c, α Ges.: γ C) Geg.: a, α, γ Ges.: c D) Geg.: a, b, c Ges.: β	
3	Ausgehend vom Funktionsgraphen von $f(x) = \sin(x)$ kann ich die Gleichungen für **g(x)** und **h(x)** richtig zuordnen. **g(x)** = ... ◯ $2 \cdot \sin(x)$ ◯ $\sin(2x)$ ◯ $\sin(x + 2)$ ◯ $2 \cdot \sin(x - 2)$ **h(x)** = ... ◯ $2 \cdot \sin(x)$ ◯ $\sin(2x + 1)$ ◯ $2 \cdot \sin(x + 1)$ ◯ $2 \cdot \sin(x - 1)$	
4	Gib an, welche der folgenden Aussagen falsch sind und stelle sie richtig. A) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ B) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$ C) $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ D) $\cos(\delta) = \sin\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)$	
5	Ich kann die Periode und die Nullstellen der folgenden Funktion bestimmen: A) $y(t) = \sin(2t + 1)$ B) $y(t) = \sin(0{,}5t + 2)$ C) $y(t) = \sin(3t - 3)$	
6	Ergänze die Sätze richtig: A) Sinus- und Cosinuswerte eines Winkels liegen im Bereich ... . B) Die Asymptoten der Tagensfunktion $y = \tan(x)$ liegen bei ... . C) Die Amplitude ist die ... Auslenkung bei einer harmonischen Schwingung.	
7	Ich kann die Gleichung $3 \cdot \sin(x) = 2 \cdot \cos(x)$ nach x im Intervall $[0; 2\pi[$ lösen.	

Lösung:
1) siehe Seiten 124ff. 2) A) Cosinussatz, B) Sinussatz, C) Sinussatz, D) Cosinussatz
3) $g(x) = \sin(2x)$, $h(x) = 2 \cdot \sin(x + 1)$ 4) A) Richtig, B) $\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)$, C) Richtig,
D) $\cos(\delta) = \sin\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right)$ 5) A) $p = \pi$, $t_0 = -0{,}5$; B) $p = 4\pi$, $t_0 = -4$; C) $p = \frac{2\pi}{3}$, $t_0 = 1$
6) A) $[-1; 1]$, B) ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, C) größte 7) $x_1 \approx 0{,}588...$; $x_2 \approx 3{,}729...$

6 Kurvendarstellung

Bisher wurden Funktionen durch den Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y angegeben. Oft ist es jedoch notwendig, die Koordinaten eines Punkts zu einem gewissen Zeitpunkt anzugeben oder Kurven darzustellen, die keine Funktionen sind. In diesen Fällen können deren Koordinaten in Abhängigkeit von einer anderen Variablen, zum Beispiel der Zeit oder dem Drehwinkel, angegeben werden.

6.1 Kurven in Polarkoordinaten

Für die Überwachung in der Luft- oder Seefahrt werden Rundsichtradare eingesetzt. Diese geben die Position eines Objekts durch die Entfernung und einen Winkel, zum Beispiel zur Nordrichtung, an. Diese Anzeige heißt PPI-Scope (plan position indication). Wird sie zusätzlich mit einem Höhenmessradar kombiniert, kann auch die Höhe des Objekts bestimmt werden.

BC **6.1** In der Abbildung ist die Lage des Punkts P_1 durch kartesische Koordinaten angegeben. Die Lage des Punkts P_2 ist durch den Winkel zur x-Achse und die Entfernung vom Koordinatenursprung angegeben.

1) Bestimme für den Punkt P_1 den Abstand vom Ursprung und den Winkel zwischen OP_1 und der x-Achse.

2) Gib die kartesischen Koordinaten des Punkts P_2 an und dokumentiere deine Vorgehensweise.

Die Lage eines Objekts ist durch den Abstand von einem festen Punkt und den Winkel, den die Verbindungsgerade mit diesem Punkt mit einer gegebenen Richtung einschließt, eindeutig bestimmt. In der Mathematik heißt dieser feste Punkt **Pol** und die vorgegebene Richtung **Polarachse**.

Die Halbgerade vom Pol O durch den Punkt P heißt **Polstrahl**.

Die Länge der Strecke $r = \overline{OP}$ wird als **Abstand** oder **Radius** bezeichnet.

Der (orientierte) Winkel φ zwischen der Polarachse und dem Polstrahl wird **Richtungswinkel**, **Polarwinkel** oder **Azimut** genannt.

Das Wertepaar (r; φ) nennt man **Polarkoordinaten** des Punkts P.

Da sich die Punkte P(r; φ) und P′(r; φ + 360°) an derselben Stelle befinden, genügt es, den Winkel zwischen 0° und 360° bzw. 0 rad und 2π rad anzugeben.

Um Verwechslungen mit der üblichen Koordinatenschreibweise zu vermeiden, schreiben wir P(r; φ) oder P(r ∢ φ). Ist der Winkel nicht im Bogenmaß angegeben, so wird das Gradzeichen ergänzt.

ZB: P(5; 30°) bzw. $P\left(5; \frac{\pi}{6}\right)$ oder P(5 ∢ 30°); Q(3,5; 2)

Oft wird der Pol in den Koordinatenursprung gelegt und als Polarachse die positive x-Achse gewählt. Mithilfe des Satzes des Pythagoras und der Winkelfunktionen ergeben sich in diesem Fall folgende Zusammenhänge:

- $(x_P|y_P)$ ist gegeben, $(r; \varphi)$ ist gesucht:
  $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ und $\tan(\varphi) = \frac{y_P}{x_P}$ für $x_P \neq 0$
  $x_P = 0$: $y_P > 0 \Rightarrow \varphi = 90°$, $y_P < 0 \Rightarrow \varphi = 270°$
- $(r; \varphi)$ ist gegeben, $(x_P|y_P)$ ist gesucht:
  $\cos(\varphi) = \frac{x_P}{r} \Rightarrow x_P = r \cdot \cos(\varphi)$
  $\sin(\varphi) = \frac{y_P}{r} \Rightarrow y_P = r \cdot \sin(\varphi)$

Jeder Punkt P ($\neq$ O) der Ebene kann in Bezug auf einen Pol O und eine Polarachse durch die **Polarkoordinaten** $(r; \varphi)$ festgelegt werden. Dabei ist r der Abstand des Punkts vom Pol und φ der orientierte Winkel zwischen Polarachse und Polstrahl.

Umrechnung

… in Polarkoordinaten	… in kartesische Koordinaten
$r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$	$x_P = r \cdot \cos(\varphi)$
$\tan(\varphi) = \frac{y_P}{x_P}$, $x_P \neq 0$	$y_P = r \cdot \sin(\varphi)$

6.2 Gib die kartesischen Koordinaten des gegebenen Punkts an. B

a) A(4; 73°) **b)** B(7; 210°) **c)** C(5; 2)

Lösung:

a) $x_A = 4 \cdot \cos(73°) = 1{,}169...$; $y_A = 4 \cdot \sin(73°) = 3{,}825...$; A(1,2|3,8)

b) $x_B = 7 \cdot \cos(210°) = -6{,}062...$; $y_B = 7 \cdot \sin(210°) = -3{,}5$; B(−6,1|−3,5)

c) $x_C = 5 \cdot \cos(2) = -2{,}080...$;
$y_C = 5 \cdot \sin(2) = 4{,}546...$; C(−2,1|4,5)

- Beachte, dass der Winkel im Bogenmaß angegeben ist.

6.3 Gib die Polarkoordinaten (Winkel in Grad) des gegebenen Punkts an. Dokumentiere deine Überlegungen. BC

1) A(1,5|2) **2)** B(−3|4) **3)** C(−7,6|−3,3) **4)** D(5,2|−0,5)

Lösung:

1) $r_A = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = 2{,}5$; A liegt im 1. Quadranten,
daher: $\varphi_B = \arctan\left(\frac{2}{1{,}5}\right) = 53{,}130...°$; A(2,5; 53,1°)

2) $r_B = 5$; B liegt im 2. Quadranten, daher:
$\varphi_B = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + 180° = 126{,}869...°$; B(5; 126,9°)

3) $r_C = \sqrt{(-7{,}6)^2 + (-3{,}3)^2} = 8{,}285...$; C liegt im 3. Quadranten, daher:
$\varphi_C = \arctan\left(\frac{-3{,}3}{-7{,}6}\right) + 180° = 203{,}470...°$; C(8,3; 203,5°)

4) $r_D = \sqrt{5{,}2^2 + (-0{,}5)^2} = 5{,}223...$; D liegt im 4. Quadranten, daher:
$\varphi_D = \arctan\left(\frac{-0{,}5}{5{,}2}\right) + 360° = 354{,}507...°$; D(5,2; 354,5°)

Kurvendarstellung

Auch Kurven können mithilfe von Polarkoordinaten beschrieben werden. Der Winkel φ ändert sich dabei beliebig, ist also die unabhängige Variable. Jedem Winkel wird ein Radius r ($r \geqslant 0$) zugeordnet und man erhält somit eine Funktion der Form $r = r(\varphi)$, zB $r(\varphi) = 3 \cdot \varphi$.

Angabe einer **Kurvengleichung in Polarkoordinaten**:

$r = r(\varphi)$

Polarkoordinaten eignen sich zum Beispiel für die Darstellung von Spiralen.

Die **archimedische Spirale** ist durch die Funktionsgleichung $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ ($a > 0$) gegeben. Wir erstellen für a = 4 und $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ eine Wertetabelle.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	0	π	2π	4π	6π	8π

Abb. 6.1

ZB: Bei einem Drehwinkel von π beträgt der Radius 4π.
Führt man nicht nur eine Drehung durch, sondern zum Beispiel vier volle Umdrehungen (Abb. 6.1), so erkennt man, dass der Abstand zwischen den Spirallinien konstant ist.

B **6.4** Gib die kartesischen Koordinaten des gegebenen Punkts an.
a) A(3; 102°) ***b)*** B(1,2; 310°) ***c)*** $C\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$ ***d)*** $D\left(3,7; \frac{6\pi}{5}\right)$

Aufgaben 6.5 – 6.6: Gib jeweils die Polarkoordinaten des gegebenen Punkts an (Winkel in Grad) und dokumentiere deine Überlegungen.

BC **6.5** ***a)*** A(0|3,5) ***b)*** B(8|0) ***c)*** C(0|–9) ***d)*** D(–4,6|0)

BC **6.6** ***a)*** A(3,1|–6,2) ***b)*** B(11|1) ***c)*** C(–2|–5) ***d)*** D(–7,3|2,9)

B **6.7** Stelle die archimedische Spirale $r(\varphi) = a \cdot \varphi$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) für ***a)*** a = 1, ***b)*** a = 2 dar.

B **6.8** Die Funktionsgleichung $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$ beschreibt eine **hyperbolische Spirale**. Stelle den Graphen der Funktion für $0 < \varphi \leqslant 4\pi$ dar. ***a)*** a = 2 ***b)*** a = 6 ***c)*** a = 3

BC **6.9** Eine **logarithmische Spirale** ist durch die Gleichung $r(\varphi) = a^{\varphi}$ gegeben.
1) Durch welchen Punkt verlaufen alle logarithmischen Spiralen?
2) Welche Kurve entsteht, wenn a = 1 ist?
3) Zeichne den Funktionsgraphen für a = 2 im Bereich $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

D **6.10** Welche der gegebenen Funktionsgleichungen beschreiben einen Kreis? Begründe deine Antwort.
1) $r = \cos(\varphi)$ ***2)*** $r = 2$ ***3)*** $r = \varphi$ ***4)*** $r = 4 \cdot \sin(\varphi)$ ***5)*** $r = \varphi^2$

B **6.11** In der Abbildung sind die Löcher eines Flansches (dient der Verbindung von Rohren) gegeben. Zur Bemaßung müssen die Polarkoordinaten der Mittelpunkte der Löcher angegeben werden. Ermittle die fehlenden Bemaßungen der Winkel.
a) ***b)***

TE

Technologieeinsatz: Kurven in Polarkoordinaten

Mathcad

Kurven in Polarkoordinaten können in Mathcad mithilfe von **Kreisdiagramm** (Symbolleiste **Diagramm**) dargestellt werden. Dazu wird zuerst der Bereich für den Winkel festgelegt. Dieser muss im Bogenmaß angegeben werden, obwohl die Beschriftung des Diagramms im Gradmaß erfolgt. Nach dem Öffnen des Kreisdiagramms können der Winkel und die Funktionsgleichung in die Platzhalter eingegeben werden.

BCD TE

TI-Nspire: www.verlaghpt.at

6.12 ***1)*** Stelle die „**Goldene Spirale**" $r(\varphi) = r_0^{\frac{2\varphi}{\pi}}$ mit $r_0 = \sqrt{2}$ dar.

2) Gib die Radien zu $\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ und 2π an. Was fällt dir auf? Überlege zuerst, wie sich der Radius jeweils bei einer halben Drehung ändert.

Lösung:

Goldene Spirale

1) $\varphi := 0, 0.01 .. 4\pi \qquad r_0 := \sqrt{2} \qquad r(\varphi) := r_0^{\frac{2\varphi}{\pi}}$

- Der Bereich für φ und die Schrittweite sowie die Funktion r(φ) werden definiert.
- Der obere Wert gibt den maximalen Radius an.
- Der Wert rechts gibt an, wo die senkrechte Achse eingetragen wird.
- Anschließend können die Gitternetzlinien angezeigt werden (Doppelklick in das Diragrammfeld).

2) Wertetabelle:

$\varphi_1 := 0, \frac{\pi}{2} .. 4\pi$

$\varphi_1 =$	$r(\varphi_1) =$
0	1
1.571	1.414
3.142	2
4.712	2.828
6.283	4
7.854	5.657
9.425	8
10.996	11.314
12.566	16

- Für die Angabe der Wertetabelle wird eine neue Schrittweite für den Winkel gewählt.
- Die Werte für φ und r(φ) werden anschließend durch Eingabe von φ_1= und $r(\varphi_1)$= ausgegeben.

Der Radius wächst bei jeder Vierteldrehung um den Faktor $\sqrt{2}$.

ABCD TE

6.13 Durch die Gleichung $r(\varphi) = \sin(n \cdot \varphi)$ werden so genannte **Rosenkurven** beschrieben.

1) Stelle die Rosenkurve für n = 2, 3, 4 und 5 dar. Was kannst du über die Anzahl der „Blätter" sagen?

2) Gib die Gleichung der Rosenkurve aus Abb. 6.2 an.

Abb. 6.2

Abb. 6.3

3) Begründe, warum für n = 1 ein Kreis entsteht. Wo liegt sein Mittelpunkt?
Hinweis: Zeichne das gleichschenklige Dreieck OPM ein (siehe Abb. 6.3) und berechne die Länge der Schenkel.

6.2 Kurven in Parameterdarstellung

Auf dem Foto siehst du eine rollende Dose. Die Lasche zum Öffnen der Dose beschreibt bei dieser Drehung eine Kurve. Die Position der Lasche ist vom Drehwinkel abhängig. Die Funktionsgleichung wird daher nicht in der Form $y = f(x)$ angegeben, sondern beide Koordinaten werden in Abhängigkeit vom Drehwinkel angegeben.

AB **6.14** Ein Regentropfen trifft auf eine Fensterscheibe eines fahrenden Zugs (siehe Abbildung). Er bewegt sich aufgrund der Schwerkraft mit der Geschwindigkeit $v_R = 2\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach unten. Durch die Geschwindigkeit $v_Z = 15\,\frac{m}{s}$ des Zugs wird er horizontal abgelenkt.

1) Gib die Lage des Tropfens in Abhängigkeit von der Zeit t mithilfe der Koordinaten x(t) und y(t) an. Wo befindet er sich nach t = 0,1 s; 0,2 s; 0,3 s?

2) Gib die Funktion, die die Bewegung des Tropfens beschreibt, in der Form $y = f(x)$ an.

Werden zum Beispiel Bewegungen dargestellt, so kann die Änderung der Lage eines beobachteten Punkts in Abhängigkeit von der Zeit oder bei Drehungen in Abhängigkeit vom Winkel beschrieben werden. Die Koordinaten $(x|y)$ des Punkts werden dann beide in Abhängigkeit von **einer** Variablen t angegeben und man erhält die Funktionen x(t) und y(t). Diese Variable wird als **Parameter** t (Betonung auf der zweiten Silbe) bezeichnet.

Parameterdarstellung

Die Koordinaten der Punkte einer Kurve werden mithilfe eines Parameters angegeben:

$x = x(t),\ \ y = y(t)$

- **Parameterdarstellung eines Kreises**

  Ein Kreis kann mithilfe des Radius r als Drehung eines Punkts um den Drehwinkel t dargestellt werden. Die Koordinaten eines beliebigen Kreispunkts sind durch $x = r \cdot \cos(t)$ und $y = r \cdot \sin(t)$ gegeben. Gilt $0° \leq t < 360°$ bzw. $0 \leq t < 2\pi$, so wird jeder Punkt der Kreislinie erreicht.

  Somit ergibt sich: $x(t) = r \cdot \cos(t)$
  $y(t) = r \cdot \sin(t)$

- **Parameterdarstellung des schiefen Wurfs**

  Beim schiefen Wurf wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α schräg nach oben geworfen. Die Bewegung wird in eine horizontale und eine vertikale Komponente zerlegt. Der vertikalen Bewegungskomponente entgegengesetzt wirkt die Schwerkraft. Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung der Koordinaten x und y abhängig von der Zeit t: $x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$
  $y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

6.15 Stelle die Bahn eines schräg geworfenen Balls für $v_0 = 10\,\frac{m}{s}$ und $\alpha = 45°$ grafisch dar. Gib den Zeitpunkt des Aufpralls und die Flugweite an.

B

$x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t,\ \ y(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Lösung:

$x(t) = 10\,\frac{m}{s} \cdot \cos(45°) \cdot t = 5 \cdot \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \cdot t$

$y(t) = 10\,\frac{m}{s} \cdot \sin(45°) \cdot t - \frac{9{,}81}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 5 \cdot \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{9{,}81}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

- Die gegebenen Werte werden eingesetzt und die Funktionen vereinfacht.

Wertetabelle:

t	x(t)	y(t)
0 s	0 m	0 m
0,5 s	3,54 m	2,31 m
1 s	7,07 m	2,17 m
1,5 s	10,61 m	−0,43 m

- Für die Zeit t werden Werte gewählt und die Koordinaten für jeden Zeitpunkt t berechnet.

t = 1 s
P (7,07 m | 2,17 m)

- Die Koordinaten werden in ein Koordinatensystem eingetragen.
- Aus dem Diagramm kann die Lage der Punkte, nicht aber die Zeit t abgelesen werden.

$y = 0\,m{:}\ 5 \cdot \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{9{,}81}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 0\,m$

$t = 0\,s$ oder $t = 1{,}441...\,s$

$x(1{,}441...\,s) = 5 \cdot \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \cdot 1{,}441...\,s = 10{,}193...\,m \approx 10{,}2\,m$

- Beim Aufprall ist die y-Koordinate 0 m. Daraus können die Zeit und anschließend die Flugweite berechnet werden.

In manchen Fällen ist es möglich, die in Parameterdarstellung angegebene Funktion mithilfe einer **parameterfreien Funktionsgleichung** anzugeben, indem man den Parameter t eliminiert.

6.16 Stelle die Kurve $x(t) = t^2$, $y(t) = t$ dar und gib eine parameterfreie Darstellung an. Beschreibe die dargestellte Kurve mit eigenen Worten.

BD

Lösung:

t	x(t)	y(t)
−2	4	−2
−1	1	−1
0	0	0
1	1	1
2	4	2

- Eine Wertetabelle wird für die Koordinaten x(t) und y(t) erstellt und die Punkte werden in ein Koordinatensystem eingetragen.

Die Kurve ist eine „liegende" Parabel.

$x = t^2, y = t \Rightarrow x = y^2$

$y_{1,2} = \pm\sqrt{x}$

- Da $y = t$ ist, kann man den Parameter bei $x = t^2$ durch y ersetzen. Um die Funktionsgleichungen in der Form $y = f(x)$ anzugeben, muss noch die Wurzel gezogen werden und man erhält zwei Funktionsäste mit unterschiedlichen Vorzeichen.

Ist die Funktionsgleichung $y = f(x)$ gegeben, so kann eine (von vielen möglichen) Parameterdarstellungen angegeben werden, indem $x(t) = t$ und somit $y(t) = f(t)$ gesetzt werden.
ZB: $y = x^2 \Rightarrow x(t) = t, y(t) = t^2$

Kurvendarstellung

Abrollbewegungen

Wir stellen uns einen Punkt P mit einem Kreis (Radius r) fest verbunden vor, zum Beispiel ein Katzenauge zwischen den Speichen eines Fahrrads. Dieser Kreis rollt (ohne zu gleiten) auf einer Geraden ab. Die Bahn, die der Punkt dabei beschreibt, heißt **Zykloide**. Diese Kurve entsteht zum Beispiel bei der Drehung eines Rads und wird daher auch als **Radlinie** bezeichnet. Im Maschinenbau treten diese Kurven bei Zahnstangen auf.

Der Punkt P hat den Abstand $a = \overline{MP}$ vom Mittelpunkt des Kreises. Die Abbildung zeigt die Lage des Punkts P zu Beginn der Drehung und nach dem Abrollen um den Winkel t. Ist der Winkel im Bogenmaß gegeben, so ist die Strecke b, die der Kreis dabei zurücklegt, $b = r \cdot t$. Für die Koordinaten des Punkts P gilt dann:

$x_P = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$
$y_P = r - a \cdot \cos(t)$

Daraus erhält man die Parameterdarstellung einer Zykloide:

$$x(t) = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$$
$$y(t) = r - a \cdot \cos(t) \quad \text{mit } a > 0,\ r > 0,\ t \in \mathbb{R}$$

Je nachdem, wo sich der Punkt P in Bezug auf den Kreis befindet, unterscheidet man:

- **Gespitzte Zykloide**
  a = r:

  r = 2, a = 2

- **Gestreckte Zykloide**
  a < r:

  r = 2, a = 1

- **Verschlungene Zykloide**
  a > r:

  r = 2, a = 3

Rollt ein Kreis **auf** einem **weiteren Kreis** ab, so entstehen so genannte **Epizykloiden**. Diese treten zum Beispiel beim Abrollen von Zahnrädern auf. Die Parameterdarstellung kann ähnlich zu der der Zykloide ermittelt werden:

$$x(t) = (r_1 + r_2) \cdot \cos\left(\frac{r_2}{r_1} \cdot t\right) - a \cdot \cos\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1} \cdot t\right)$$

$$y(t) = (r_1 + r_2) \cdot \sin\left(\frac{r_2}{r_1} \cdot t\right) - a \cdot \sin\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1} \cdot t\right)$$

Wie auch bei den Zykloiden wird je nach Länge des Abstands a zwischen gespitzten ($a = r_2$), gestreckten ($a < r_2$) oder verschlungenen ($a > r_2$) Epizykloiden unterschieden.

$r_1 = 6, r_2 = 2, a = 2$

$r_1 = 6, r_2 = 2, a = 1$

$r_1 = 6, r_2 = 2, a = 3$

Eine weitere Abrollbewegung erhält man, wenn ein Kreis **in** einem anderen Kreis abrollt. Die entstehenden Kurven heißen **Hypozykloiden** und deren Parameterdarstellung lautet:

$$x(t) = (r_1 - r_2) \cdot \cos\left(\frac{r_2}{r_1} \cdot t\right) + a \cdot \cos\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot t\right)$$

$$y(t) = (r_1 - r_2) \cdot \sin\left(\frac{r_2}{r_1} \cdot t\right) - a \cdot \sin\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot t\right)$$

Man unterscheidet auch hier gespitzte ($a = r_2$), gestreckte ($a < r_2$) oder verschlungene ($a > r_2$) Hypozykloiden.

$r_1 = 6, r_2 = 2, a = 2$

$r_1 = 6, r_2 = 2, a = 1$

$r_1 = 6, r_2 = 2, a = 3$

Da sich die Kreisumfänge zweier Kreise so verhalten wie deren Radien, kann die Anzahl der Umdrehungen des abrollenden Kreises aus dem Verhältnis $r_1 : r_2$ berechnet werden. Ist $n = \frac{r_1}{r_2}$ ganzzahlig, entstehen n Bögen, die Kurve schließt sich nach n Umdrehungen des abrollenden Kreises, andernfalls geschieht das erst nach mehreren Umläufen.

BC **6.17** Stelle die Hypozykloide für $r_1 = 4$ und $r_2 = a = 1$ dar. Wie oft rollt der innere Kreis ab?

Lösung:

$x = (4 - 1) \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot t\right) + 1 \cdot \cos\left(\frac{4-1}{4} \cdot t\right) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot t\right) + \cos\left(\frac{3}{4} \cdot t\right) = 4 \cdot \cos^3\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$ (vgl. 5.86)

$y = (4 - 1) \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t\right) - 1 \cdot \sin\left(\frac{4-1}{4} \cdot t\right) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t\right) - \sin\left(\frac{3}{4} \cdot t\right) = 4 \cdot \sin^3\left(\frac{1}{4} \cdot t\right)$

Da das Verhältnis der Radien 4 : 1 ist, rollt der innere Kreis 4 mal ab.

Wertetabelle:

t	x(t)	y(t)
0	4	0
$\frac{\pi}{2}$	3,154...	0,224...
π	1,414...	1,414...
$\frac{3\pi}{2}$	0,224...	3,154
2π	0	4

- Es genügt, die Werte für eine Umdrehung zu berechnen, die anderen Werte ergeben sich durch Spiegelung.

Die gespitzte Hypozykloide aus Aufgabe 6.17 mit $r_1 = 4 \cdot r_2$ heißt **Astroide** (Sternlinie).

Lissajous-Figuren (Jules Antoine Lissajous, französischer Physiker, 1822 – 1880)

In Abschnitt 5.4 haben wir Sinusschwingungen gleicher Richtung überlagert und bei gleicher Frequenz wieder eine Sinusschwingung erhalten. Überlagert man Sinusschwingungen, die **senkrecht** aufeinander stehen, so erhält man **Lissajous-Figuren**. Hier wird die x- bzw. y-Koordinate durch eine Sinusfunktion angegeben. Diese können mithilfe eines Oszillographen dargestellt werden.

$x(t) = \sin(2t)$
$y(t) = \sin(t)$

Ihre Gleichung in Parameterdarstellung lautet:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

A_1 bzw. A_2 steht für die jeweilige Amplitude.

Jeder Lissajous-Figur kann ein Rechteck mit der Länge $a = 2A_1$ und der Breite $b = 2A_2$ umschrieben werden. Mithilfe der Anzahl der Berührpunkte der Kurve mit den Rechteckseiten kann das Frequenzverhältnis ermittelt werden. Daher können aus der Lissajous-Figur die Amplituden und das Frequenzverhältnis abgelesen werden. Sie dienen dazu, Frequenzunterschiede und Phasenverschiebungen zu messen.

ZB: $x(t) = 2 \cdot \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$
Das umschriebene Rechteck hat eine Länge von 4 Einheiten und eine Breite von 2 Einheiten. Da $\omega_1 = 2$ ist, gibt es in einer Periode je zwei Maxima bzw. Minima in x-Richtung. Daher berührt die Kurve die **senkrechten Rechteckseiten je zweimal**. In y-Richtung gibt es in einer Periode drei Maxima bzw. Minima und daher jeweils **drei Berührpunkte** mit den **waagrechten Rechteckseiten**.

$\omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$

Je nach Frequenz und Phasenverschiebung der beiden Schwingungen ergeben sich unterschiedliche Kurven. Bei rationalen Frequenzverhältnissen sind es geschlossene Überlagerungskurven, bei gleicher Frequenz entstehen Ellipsen. Sind zusätzlich die Phasenverschiebungen spezielle Winkel, ergeben sich besondere Kurven:

- $A_1 = A_2$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$:
  $x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$,
  $y(t) = A_1 \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$
  Dies ist die Parameterdarstellung eines **Kreises**.

- $\varphi_2 = \varphi_1$ oder $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$:
  $x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$, $y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ oder
  $y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1 + \pi) = -A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$
  Für jeden Punkt $P(x(t)|y(t))$ gilt: $\frac{y}{x} = \frac{A_2}{A_1} = k$ bzw. $\frac{y}{x} = -\frac{A_2}{A_1} = k$. Es ergibt sich somit eine **Gerade** mit der Steigung k.

6.18 Stelle die in Parameterdarstellung gegebene Kurve dar und gib eine parameterfreie Darstellung an. B

a) $x(t) = 2t$, $y(t) = t + 3$ **c)** $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 2t$ **e)** $x(t) = \frac{t}{3}$, $y(t) = -2t^2 + 4$
b) $x(t) = t - 4$, $y(t) = 5t + 1$ **d)** $x(t) = \frac{t^2}{2}$, $y(t) = 4t + 1$ **f)** $x(t) = 2t - 3$, $y(t) = t^2$

6.19 Die Parameterdarstellung einer Kurve ist durch $x(t) = a \cdot \cos(t)$, $y(t) = b \cdot \sin(t)$ gegeben. BCD
1) Stelle die Kurve für $a = 4$ und $b = 3$ im Bereich $0 \leqslant t < 2\pi$ dar. Um welche Kurve handelt es sich?
2) Zeige, dass die Kurve auch durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ darstellbar ist.

6.20 In der Abbildung ist eine Lissajous-Figur dargestellt. Ermittle aus der Figur die Amplituden und das Frequenzverhältnis. C

a) **b)** **c)**

6.21 In ein mit Wasser gefülltes Rohr wurde ein Loch gebohrt. Die Ausflussgeschwindigkeit in horizontaler Richtung beträgt $v_0 = \sqrt{2gh}$. Der Wasserstrahl kann durch die Gleichungen $x(t) = v_0 \cdot t$, $y(t) = H - \frac{g}{2} \cdot t^2$ ($g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$) beschrieben werden. AB
1) Stelle den Verlauf des Wasserstrahls grafisch dar.
2) Wie weit reicht der Wasserstrahl?
3) Gib die Gleichung in parameterfreier Form an.

a) h = 0,2 m **b)** h = 0,5 m **c)** h = 1,2 m

Mathcad, GeoGebra: www.verlaghpt.at

Technologieeinsatz: Parameterdarstellung

TI-Nspire

In der Applikation **Graphs** wird bei
3: Graph–Eingabe/Bearbeitung
3: Parametrisch gewählt.
Als Winkelmaß wird das Bogenmaß eingestellt.
Es erscheinen nun in der Eingabezeile die Funktionsterme x(t) und y(t).

B **6.22** Stelle die Lissajous-Figur $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ grafisch dar.

Lösung:

- Die beiden Terme werden bei **x1(t)** und **y1(t)** eingegeben. Dabei muss – im Gegensatz zur Einstellung „Funktion" – die Variable **t** sein.
- Der Bereich und die Schrittweite (**tstep**) für t können ebenfalls gewählt werden.
- Bei den Fenster-Einstellungen werden passende Werte eingestellt.
- Die Lissajous-Figur wird nun allerdings verzerrt dargestellt. Gleiche Skalierung auf den Achsen wird mithilfe des Menüs **4: Fenster, B: Zoom-Quadrat** erreicht.
- Wird die Kurve aufgrund der Schrittweite 0,13 nicht ganz geschlossen, kann dies durch Setzen der Schrittweite auf 0,01 behoben werden.

BC TE

6.23 Stelle die Lissajous-Figur dar. Überlege zuerst, welche Kurve entsteht.

a) $x(t) = 2 \cdot \sin(t)$, $y(t) = 3 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $x(t) = 2 \cdot \sin(t)$, $y(t) = 3 \cdot \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$

Lösung:

a) Die Frequenzen sind gleich, die Amplituden nicht. Die Kurve ist daher eine Ellipse.

b) Das Verhältnis der Kreisfrequenzen beträgt $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$. Es entsteht eine geschlossene Kurve.

BC TE

6.24 Stelle die Lissajous-Figur grafisch dar. Überlege zuerst, welche Kurve entsteht.

a) $x(t) = 2 \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, $y(t) = 4 \cdot \sin(t)$

b) $x(t) = \sin(4t)$, $y(t) = 2 \cdot \sin(4t + \pi)$

c) $x(t) = \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$, $y(t) = 2 \cdot \sin(t)$

d) $x(t) = 3 \cdot \sin(2t)$, $y(t) = 3 \cdot \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$

AB TE

6.25 Ein Spezialfall der gespitzten Epizykloide tritt ein, wenn $n = \frac{r_1}{r_2} = 1$, also $r_1 = r_2$ ist. Die Kurve heißt dann **Kardioide** oder auch Herzkurve.

1) Gib die Parameterdarstellung der Kardioide an.

2) Stelle die Kurve für $r_1 = 2$ dar.

ABD TE

6.26 Wird ein zylindrisches Objekt durch parallele Lichtstrahlen beleuchtet, so entsteht als Einhüllende der reflektierten Lichtstrahlen (Kaustik) eine **Nephroide**. Sie hat die Form einer Niere und ist eine gespitzte Epizykloide. Diese Kurve wird auch „Kaffeehäferlkurve" genannt.

1) Begründe, in welchem Verhältnis die beiden Radien stehen müssen.

2) Stelle eine Nephroide mit $r_1 = 4$ grafisch dar.

Abb.: „Kaffeehäferlkurve"

ABC TE

6.27 In der unten stehenden Abbildung ist eine (gespitzte) Hypozykloide dargestellt (Skalierung je 1 Einheit).

1) Ermittle die Radien des festen (r_1) und des abrollenden Kreises (r_2).

2) Gib die Funktionsgleichung der dargestellten Hypozykloide an.

3) Stelle die Kurve grafisch dar.

a) **b)** **c)**

Kurvendarstellung

Zusammenfassung

Polarkoordinaten
Ein Punkt $P(x_P|y_P)$ der Ebene kann durch Polarkoordinaten $P(r; \varphi)$ festgelegt werden.

Umrechnungen: $x_P = r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

$y_P = r \cdot \sin(\varphi)$ $\quad \tan(\varphi) = \frac{y_P}{x_P},\ x_P \neq 0$

Bei Kurven in Polarkoordinaten ist der Abstand r eine Funktion des Winkels φ: $r = r(\varphi)$

Parameterdarstellung
Die Koordinaten der Punkte einer Kurve werden mithilfe eines Parameters t angegeben:
$x = x(t),\ y = y(t)$

Weitere Aufgaben

B **6.28** Gib die Polarkoordinaten bzw. die kartesischen Koordinaten des Punkts an.
a) $A(3|6)$ **b)** $B(4; 30°)$ **c)** $C(-1{,}5|3{,}2)$ **d)** $D(0|-4)$ **e)** $E\left(6; \frac{4\pi}{3}\right)$

BCD **6.29** **1)** Stelle die Kurve der durch Polarkoordinaten gegebenen Funktion grafisch dar.
2) Gib die Kurvengleichung in der Form $y = y(x)$ an. Handelt es sich dann noch um eine Funktion? Begründe deine Antwort.
a) $r(\varphi) = \frac{1}{\cos(\varphi)}$ **b)** $r(\varphi) = \frac{1}{\sin(\varphi)}$

D **6.30** Zeige, dass jede Kurve $r = r(\varphi)$ in Polarkoordinaten durch $x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$ in Parameterdarstellung dargestellt werden kann.

ABD **6.31** Ein Faden wird so von einer Spule abgewickelt, dass die Spule fest bleibt und der Faden immer gespannt ist. Das freie Ende des Fadens beschreibt dabei eine so genannte **Kreisevolvente**. Für diese Kurve gilt:
$x(t) = r \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t)),\ y(t) = r \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$
1) Leite obige Parameterdarstellung her.
2) Stelle die Kreisevolvente für einen Kreis mit Radius $r = 2$ im Bereich $0 \leqslant t < 2\pi$ grafisch dar.

AB **6.32** Die Parameterdarstellung $x(t) = t^2,\ y(t) = a \cdot t^3$ ergibt eine **Neil'sche Parabel** (William Neil, englischer Mathematiker, 1637 – 1670).
1) Stelle die Neil'sche Parabel für $a = 1$ grafisch dar.
2) Gib eine parameterfreie Darstellung an.

BC **6.33** Stelle die Kurve, die durch die gegebene Parameterdarstellung beschrieben wird, grafisch dar und gib an, um welche Kurve es sich handelt.
a) $x(t) = \sin(t),\ y(t) = 2 \cdot \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $x(t) = 4 \cdot t - 3 \cdot \sin(t),\ y(t) = 4 - 3 \cdot \cos(t)$

ABCD **6.34** Gib die Rosenkurve $r(\varphi) = \sin(n \cdot \varphi)$ in Parameterdarstellung an. Zeige, dass diese auch als Hypozykloide erzeugt werden kann. Wie groß sind die Radien r_1, r_2 und der Abstand a?
Hinweis: Überlege anhand der Erzeugung einer Hypozykloide, wie eine Rosenkurve entstehen kann und wie groß a sein muss. Verwende anschließend den zweiten Summensatz und berechne die Radien r_1 und r_2. Die Rosenkurve ist um $\frac{\pi}{2}$ gedreht.

Wissens-Check

		gelöst
1	Gib die Polarkoordinaten der Punkte 1) im Bogenmaß, 2) im Gradmaß an. $A(-4\|3)$ $B(5\|-4)$ $C(-2{,}5\|-4{,}33)$ $D(\sqrt{2}\|\sqrt{2})$	
2	Gib die kartesischen Koordinaten der Punkte an. $E(4; 60°)$ $F(5; 1{,}5\pi)$ $G(3{,}4; 2)$ $H(3; 0)$	
3	Gib an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. A) Bei einer archimedischen Spirale ändert sich die Länge des Leitstrahls OP proportional zu dem von der x-Achse aus gemessenen Drehwinkel φ. B) Bei einer hyperbolischen Spirale verhält sich die Länge des Leitstrahls OP umgekehrt proportional zum Drehwinkel φ.	
4	Ich weiß, was man unter einer Parameterdarstellung versteht.	
5	Aus einer Parameterdarstellung kann man eine parameterfreie Darstellung machen, indem man … eliminiert.	
6	Wie verhält sich jeweils a zu r bei einer A) gespitzten Zykloide? B) gestreckten Zykloide? C) verschlungenen Zykloide?	
7	Ich weiß, welche Kurven folgende Sachverhalte beschreiben und kann sie skizzieren. A) Ein Ventil eines Rads, wenn das Rad rollt. B) Ein Fahrradreflektor innerhalb eines rollenden Rads. C) Ein Kaugummi, der außen am Autoreifen klebt, wenn das Auto fährt. D) Eine Spikespitze von einem Auto mit Winterreifen, wenn das Auto auf einer Schneefahrbahn fährt. E) Eine Radnabe eines Rads, das auf der Straße rollt.	
8	Ich weiß, welche Kurve entsteht, wenn ein Kreis A) auf einem weiteren Kreis B) in einem weiteren Kreis abrollt und kann praktische Anwendungen angeben.	
9	Wenn eine Lissajous-Figur wie ein liegender Achter aussieht, weist das auf ein Frequenzverhältnis von … hin.	

Lösung:
1) $A(5; 2{,}5) \approx A(5; 143{,}13°)$, $B(6{,}4; 5{,}6) \approx B(6{,}4; 321{,}34°)$, $C\left(5; \frac{4}{3}\pi\right) \approx C(5; 240°)$, $D\left(2; \frac{\pi}{4}\right) = D(2; 45°)$
2) $E(3{,}46|2)$, $F(-5|0)$, $G(3{,}09|-1{,}41)$, $H(3|0)$ 3) A) richtig, B) richtig 4) siehe Seite 176
5) den Parameter t, siehe auch Seite 177 6) siehe Seite 178
7) A), B): gestreckte Zykloide, C) gespitzte Zykloide, D) verschlungene Zykloide, da die Spikespitze in den Schnee eindringt und der Reifen auf der Schneefahrbahn abrollt, E) gerade Linie, siehe auch Seite 178
8) A) Epizykloide, B) Hypozykloide, siehe auch Seite 179 9) 1 : 2

7 Komplexe Zahlen

In vielen Sammlungen mathematischer Zitate findet man den Ausspruch des deutschen Mathematikers Leopold Kronecker:

„Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk."

Im folgenden Abschnitt werden wir eine bisher noch nicht behandelte, von „Menschen erfundene" Zahlenmenge besprechen.

Leopold Kronecker (1823 – 1891)

7.1 Imaginäre Zahlen

Gehen wir in der Geschichte der Mathematik zurück bis zu den frühen Hochkulturen der Babylonier und der Ägypter, begegnen wir als erstem von „Menschenhand" geschaffenen Zahlenbereich den Bruchzahlen, um Teile von Ganzen zu beschreiben. Die Erkenntnis, dass nicht alle Strecken in geometrischen Figuren durch Bruchzahlen beschrieben werden können, hat ca. 500 v. Chr. zur „Erfindung" der irrationalen Zahlen durch griechische Mathematiker geführt. Die bis dahin im Allgemeinen nicht lösbare Gleichung $x^2 = a$ hatte damit für $a > 0$ die Lösung $x = \sqrt{a}$. Negative Zahlen hatten in der mathematischen Welt der Griechen, die vorwiegend geometrisch argumentierten, noch keinen Platz. Bis die Mathematiker die Verwendung von negativen Zahlen als sinnvoll akzeptierten, dauerte es noch lange. Um 1200 wurden negative Lösungen einer Gleichung in einem italienischen Rechenbuch erstmals zugelassen, aber noch im 17. Jahrhundert wurden sie als „absurde Zahlen" oder „falsche Zahlen" bezeichnet.

Während die mathematische Welt also noch dabei war, sich mit dem Begriff der negativen Zahlen anzufreunden, bahnte sich bereits die nächste Neuerung an. Im 16. Jahrhundert beschäftigten sich viele Mathematiker mit der Suche nach Lösungsformeln für Gleichungen. Der italienische Arzt und Mathematiker Geronimo Cardano del Ferro (1501 – 1576) stellte 1545 die Aufgabe: *„Teile 10 so in zwei Teile, dass das Produkt 40 ist."*

Der Versuch, die Aufgabe zu lösen, führte auf folgende Gleichung:

$$x \cdot (10 - x) = 40 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

Cardano fand die beiden „Lösungen":

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{und} \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Einerseits gibt es keine reelle Zahl, die die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist, andererseits zeigte sich, dass diese Ausdrücke die Gleichung erfüllen, wenn man sie einsetzt.

Um Gleichungen der Form $x^2 = a$ auch für $a < 0$ lösen zu können, „erfand" man eine Zahl, deren Quadrat (-1) ergibt. Man bezeichnete sie als „eingebildete Zahl" (latein: „numeri imaginarii"). Leonhard Euler (deutscher Mathematiker, 1707 – 1783) führte das Symbol i für $\sqrt{-1}$ ein und schrieb in einem Lehrbuch, er werde rechnen *„... wie, wenn $i^2 = -1$ sei ..."*.

i wird **imaginäre Einheit** genannt, ihre Vielfachen der Form $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$, zB 4i oder −13i, heißen **imaginäre Zahlen**.

In der **Elektrotechnik** wird die imaginäre Einheit mit **j** abgekürzt, weil **i** für die (zeitabhängige) **Stromstärke** steht. Im Folgenden werden beide Bezeichnungen verwendet.

Für die **imaginäre Einheit** gilt:

$\mathbf{i^2 = -1}$ bzw. $\mathbf{j^2 = -1}$

$i = \sqrt{-1}$ $\quad j = \sqrt{-1}$

Alle Vielfachen von i bzw. j nennt man **imaginäre Zahlen**.

In der von Euler gewählten Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ darf $\sqrt{-1}$ nicht als Zahl verstanden werden, da die für reelle Zahlen behandelten Regeln für das Rechnen mit Wurzeln für $\sqrt{-1}$ nicht uneingeschränkt gelten. Es lassen sich leicht Beispiele angeben, die auf einen Widerspruch führen.
ZB: $-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$

Mithilfe der imaginären Zahlen sind Gleichungen der Form $x^2 = a$ auch für $a < 0$ lösbar.

ZB: $x^2 = -4$ hat die beiden Lösungen $x_1 = +2 \cdot i$ und $x_2 = -2 \cdot i$, da gilt:
$(+2 \cdot i)^2 = (+2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$ und $(-2 \cdot i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Beim Rechnen mit **imaginären Zahlen** wird für **$a < 0$** definiert:
$\sqrt{a} = \pm\sqrt{|a|} \cdot i$ bzw. $\sqrt{a} = \pm\sqrt{|a|} \cdot j$

Beachte den Unterschied zum Berechnen der Wurzel, wenn nur reelle Zahlen zugelassen sind:
$x = \sqrt{a}$ mit $a > 0$ ist per Definition nur der positive Wert, für den $x^2 = a$ gilt, zB $\sqrt{4} = +2$.

Sind imaginäre Zahlen zugelassen, wird für die Wurzel aus einer negativen Zahl diese Einschränkung nicht getroffen, zB $\sqrt{-4} = \pm 2 \cdot i$.

Die mathematische Begründung hierfür folgt in Abschnitt 7.4.

Potenzen der imaginären Einheit

Aus der Definition $i^2 = -1$ können auch höhere Potenzen von i unmittelbar abgeleitet werden:

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$	...
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$	$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$	...
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$	$i^8 = i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$	...

Mithilfe von $i^4 = 1$ kann man die Potenzen von i allgemein angeben:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$ $\qquad$ $i^{4n+2} = (i^4)^n \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$ $\qquad$ $i^{4n+3} = (i^4)^n \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

7.1 Vereinfache soweit wie möglich. **a)** i^{25} **b)** j^{-1} B

Lösung:
a) $i^{25} = i^{24} \cdot i^1 = (i^4)^6 \cdot i = 1^6 \cdot i = i$ **b)** $j^{-1} = 1 \cdot j^{-1} = j^4 \cdot j^{-1} = j^3 = -j$

7.2 Gib die imaginären Zahlen an, die Lösungen der Gleichung $x^2 = -16$ sind. B

Lösung:
$x^2 = -16$
$x = \sqrt{-16}$
$x_1 = +\sqrt{|-16|} \cdot i = +\sqrt{16} \cdot i = 4 \cdot i$
$x_2 = -\sqrt{|-16|} \cdot i = -\sqrt{16} \cdot i = -4 \cdot i$

- Es ist nicht notwendig, $x = \pm\sqrt{-16}$ zu schreiben, weil per Definition sowohl $4 \cdot i$ als auch $-4 \cdot i$ als $\sqrt{-16}$ gelten.

Aufgaben 7.3 – 7.4: Vereinfache die Terme ($n \in \mathbb{Z}$).

7.3 **a)** i^{10} **b)** i^7 **c)** i^{-2} **d)** i^{-15} **e)** i^{121} **f)** i^{-98} B

7.4 **a)** i^{8n} **b)** i^{4n-1} **c)** i^{-4n-2} **d)** i^{-4n+3} **e)** i^{-4n} **f)** i^{-4n+2} B

7.5 Ergänze: i^m ist eine reelle Zahl, wenn m ... und eine imaginäre Zahl, wenn m ... . A

7.6 Gib die imaginären Zahlen an, die Lösungen der Gleichung sind. B
a) $x^2 = -49$ **b)** $x^2 = -53$ **c)** $x^2 = -\frac{1}{4}$

7.2 Die Menge der komplexen Zahlen

7.2.1 Einführung und Definition

Ab dem 16. Jh. rechneten die Mathematiker mit Zahlen wie $2 + \sqrt{-1}$, ohne deren Bedeutung genau festgelegt zu haben. Carl Friedrich Gauß gab schließlich Ausdrücken wie $2 + \sqrt{-1}$ den Namen **komplexe Zahlen**, also „zusammengesetzte Zahlen" (latein: „complexus" = verflochten).

Komplexe Zahlen sind aus reellen Zahlen und imaginären Zahlen zusammengesetzt und werden meist mit dem Buchstaben z bezeichnet.

ZB: $z = 3 + i$, $z = 5 - 2 \cdot j$,
allgemein: $z = a + b \cdot i$ bzw. $z = a + b \cdot j$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

Den rein reellen Anteil a der komplexen Zahl z bezeichnet man als **Realteil Re(z)** und den Koeffizienten b der imaginären Einheit als **Imaginärteil Im(z)**.

ZB: $z = 3 - \frac{i}{2}$, $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = -\frac{1}{2}$

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Durch Zusammensetzen einer reellen und einer imaginären Zahl entsteht eine **komplexe Zahl z**:

$z = a + b \cdot i$ (kurz: $z = a + bi$) bzw.

$z = a + b \cdot j$ (kurz: $z = a + bj$) mit $a, b \in \mathbb{R}$

Man bezeichnet **a** als **Realteil** von **z** und **b** als **Imaginärteil** von z:

$\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die imaginären Zahlen sind Teilmengen von $\mathbb{C}$.

Jede rein reelle Zahl lässt sich als komplexe Zahl mit dem Imaginärteil b = 0 interpretieren, ebenso kann man jede rein imaginäre Zahl als komplexe Zahl mit dem Realteil a = 0 betrachten.

ZB: $z = 7 \Leftrightarrow z = 7 + 0 \cdot i$; $z = 5 \cdot i \Leftrightarrow z = 0 + 5 \cdot i$

A **7.7** Gib jeweils den Imaginärteil und den Realteil der komplexen Zahlen an.
a) $z_1 = 11 + 6 \cdot i$ $z_2 = 8 \cdot i - 5$ $z_3 = 12$ $z_4 = \sqrt{3} \cdot i$
b) $z_1 = -3 - 9 \cdot j$ $z_2 = -4 \cdot j$ $z_3 = 5 \cdot j - 7$ $z_4 = \frac{j}{3}$

A **7.8** Schreibe die komplexe Zahl in der Form $z = a + b \cdot i$ an.
a) $\text{Re}(z) = 12$; $\text{Im}(z) = 2$
b) $\text{Re}(z) = 9$; $\text{Im}(z) = -4$
c) $\text{Re}(z) = 0$; $\text{Im}(z) = x$
d) $\text{Re}(z) = x$; $\text{Im}(z) = -1$

C **7.9** Gib an, in welchen der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die Zahl jeweils enthalten ist.
1) 5j **2)** 1,4 **3)** –4 **4)** $\sqrt{-2}$ **5)** π **6)** $\frac{i}{2}$ **7)** $\sqrt{3}$

D **7.10** Ist die folgende Behauptung richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.
Für jede komplexe Zahl z gilt: $z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z)$

D **7.11** Was kann man über eine komplexe Zahl aussagen, für die $\text{Re}(\text{Im}(z)) = 0$ gilt?
Gilt die gleiche Aussage auch, wenn $\text{Im}(\text{Re}(z)) = 0$ ist?

7.2.2 Die Gauß'sche Zahlenebene

Jede reelle Zahl kann als Punkt auf der Zahlengeraden interpretiert werden. Da zwischen je zwei reellen Zahlen unendlich viele weitere liegen, muss man sich die Zahlengerade als vollständig besetzt vorstellen. Die korrekte mathematische Ausdrucksweise dafür lautet: „Die reellen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden dicht." Für die imaginären Zahlen benötigt man daher eine eigene Gerade.

Die Zahlengerade mit den reellen Zahlen wird nun als **reelle Achse** (Re. A.) bezeichnet. Die imaginären Zahlen werden auf der normal dazu stehenden Geraden, der **imaginären Achse** (Im. A.) aufgetragen. Die dadurch festgelegte Ebene nennt man **Gauß'sche Zahlenebene**.

Im. A.
3i
2i
i
z = 2+3·i
Re. A
1 2 3

Anstelle der Bezeichnungen reelle Achse und imaginäre Achse wird meist Re(z) und Im(z) verwendet. In diesem Fall wird die senkrechte Achse auch nur mit den Imaginärteilen beschriftet. Wir werden bei den folgenden Grafiken ausschließlich diese Bezeichnung verwenden.

Im(z)
3
2
1
z = 2+3·i
Re(z)
1 2 3

Jede komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ kann als Zahlenpaar (a, b) aufgefasst werden, dem ein Punkt in dieser Zahlenebene entspricht. Zum Beispiel entspricht die eingezeichnete komplexe Zahl $z = 2 + 3 \cdot i$ mit dem Realteil 2 und dem Imaginärteil 3 dem Punkt (2|3) in der Gauß'schen Zahlenebene.

Komplexe Zahlen $z = a + bi$ bzw. $z = a + bj$ können als Zahlenpaare (a, b) aufgefasst und in der **Gauß'schen Zahlenebene** grafisch dargestellt werden.

Diese Darstellungsform ist zwar nach Carl Friedrich Gauß benannt, sie wurde jedoch von Jean-Robert Argand (schweizer Buchhändler, 1768 – 1822) und davon unabhängig von Caspar Wessel (dänischer Vermessungsingenieur, 1745 – 1818) entwickelt.

7.12 Stelle die angegebenen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene dar. B

$z_1 = 4$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -4 + 2i$, $z_5 = -4$, $z_6 = -3 - i$, $z_7 = -2i$, $z_8 = 3 - 2i$

Lösung:

Im(z)
$z_3 = 3i$
$z_4 = -4+2i$
$z_2 = 3+2i$
$z_5 = -4$
$z_1 = 4$
Re(z)
$z_6 = -3-i$
$z_7 = -2i$
$z_8 = 3-2i$

7.13 Schreibe die in der Gauß'schen Zahlenebene in Abb. 7.1 dargestellten komplexen Zahlen an. B

7.14 Zeichne die gegebenen komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene ein. B

$z_1 = 2 - j$; $z_2 = 3 + 4j$; $z_3 = 2{,}5j$; $z_4 = -3 - 2j$; $z_5 = -3$; $z_6 = -4j$

7.15 Markiere in der Gauß'schen Zahlenebene den Bereich, für den gilt: ABC

a) $\text{Re}(z) > 1$ **b)** $\text{Im}(z) < 0$ **c)** $|\text{Re}(z)| < 3$ **d)** $|\text{Im}(z)| > 4$

Im(z)
z_1
z_2
z_3
Re(z)
z_4
z_5

Abb. 7.1

7.2.3 Darstellungsformen von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen können auf verschiedene Arten angegeben bzw. veranschaulicht werden. Welche Darstellungsform verwendet wird, hängt unter anderem von den damit auszuführenden Rechenvorgängen ab.

Veranschaulichung als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene

Stellt man die komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ in der Gauß'schen Zahlenebene dar, so bezeichnet man nicht nur den Punkt $(a|b)$ als komplexe Zahl. In der Praxis wird auch der Zeiger vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt komplexe Zahl genannt.
Die bereits verwendete Schreibweise $\mathbf{z = a + b \cdot i}$ bzw. $z = a + b \cdot j$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als **Komponentenform**, auch die Bezeichnungen Binomform oder arithmetische Form werden verwendet. Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl können auch als **Zahlenpaar** (a, b) angegeben werden.

Die komplexe Zahl kann aber auch durch die Länge r des Zeigers und den Winkel φ angegeben werden. Es gibt also zwei Möglichkeiten, eine komplexe Zahl zu beschreiben.

- **Koordinaten a und b des Endpunkts des Zeigers: $z = a + bi$**
- **Länge r des Zeigers und Winkel φ: $z = (r; \varphi)$**

B **7.16** Zeichne den skizzierten Zeiger mit 1 E = 1 cm. Miss die Länge des Zeigers und die Größe des Winkels ab und schreibe die komplexe Zahl in der Form $z = a + bi$ und $z = (r; \varphi)$ an.

a) **b)** **c)** **d)**

Lösung:

a) $z_1 = 3 - 3i$
$z_1 \approx (4{,}2; 315°)$

b) $z_2 = 1 + 4i$
$z_2 \approx (4{,}1; 76°)$

c) $z_3 = i$
$z_3 = (1; 90°)$

d) $z_4 = -2$
$z_4 = (2; 180°)$

B **7.17** Zeichne den Zeiger, der die gegebene Zahl darstellt, in der Gauß'schen Zahlenebene ein.

a) $z_1 = 2{,}5 + 1{,}5j$ **b)** $z_2 = -8 + 3j$ **c)** $z_3 = (4; 0°)$ **d)** $z_4 = (5; 270°)$

Lösung:

a) **b)** **c)** **d)**

Darstellung in Polarform $z = (r; \varphi)$ bzw. trigonometrischer Form $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Ein Zeiger, der eine komplexe Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene beschreibt, kann also durch die Angabe seiner Länge und seines Winkels angegeben werden. Man bezeichnet die **Länge** dieses Zeigers als **Betrag r** und den **Winkel** als **Argument** (Polarwinkel) φ der komplexen Zahl z.

Betrag und Argument werden als **Polarkoordinaten von z** ($z \neq 0$) bezeichnet. Vor allem bei technischen Anwendungen wird oft die Darstellung als **Versor** $z = r \angle\varphi$, [sprich: „z ist gleich r Versor φ"] verwendet. Für die Zahl 0 ist der Winkel φ nicht definiert, eine Angabe in Polarkoordinaten ist daher nicht möglich.

Ist $z = a + bi$, dann gilt:

- Betrag von z: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argument bzw. Polarwinkel von z:
  $\arg(z) = \varphi$ mit $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$ für $a \neq 0$
  Für $a = 0$ gilt: $b > 0 \Rightarrow \varphi = 90°$; $b < 0 \Rightarrow \varphi = -90° \triangleq 270°$
  Beim Berechnen von φ mithilfe der Arcustangensfunktion ist zu beachten, in welchem Quadranten diese Zahl liegt.

ZB: Für die im 1. Quadranten liegende Zahl $z_1 = 3 + 5i$ gilt:

$\tan(\varphi_1) = \frac{5}{3} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) \approx 59°$

Für die im 3. Quadranten liegende Zahl $z_2 = -3 - 5i$ gilt:

$\tan(\varphi_2) = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

In diesem Fall ist $\arctan\left(\frac{5}{3}\right)$ nicht der Winkel φ_2, sondern wieder der Winkel φ_1. Um φ_2 zu erhalten, müssen 180° addiert werden (vergleiche Abschnitt 5).

Für φ_2 gilt daher: $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{5}{3}\right) + 180° \approx 239°$

Die Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten ist nicht eindeutig. Zum Beispiel stellen die Zahlen $z_1 = (5; 70°)$, $z_2 = (5; 430°)$ und $z_3 = (5; 4\,750°)$ drei verschiedene Polarformen derselben komplexen Zahl dar, da gilt: $70° \triangleq 70° + 360° \triangleq \ldots \triangleq 70° + k \cdot 360°$

Somit können unendlich viele verschiedene Polardarstellungen die gleiche komplexe Zahl darstellen. Man bezeichnet $z = (r; \varphi)$ mit $0° \leq \varphi < 360°$ als den **Hauptwert der komplexen Zahl**, alle anderen als Nebenwerte. Im Allgemeinen beschränken wir uns auf die Angabe des Hauptwerts.

Die Umrechnung von Polarkoordinaten $(r; \varphi)$ in Komponentenform $z = a + bi$ erfolgt mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten a, b und r:

$\cos(\varphi) = \frac{AK}{HYP} = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos(\varphi)$

$\sin(\varphi) = \frac{GK}{HYP} = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin(\varphi)$

Damit lassen sich komplexe Zahlen auch in folgender Form angeben:

$z = a + bi = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi) = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Diese Darstellungsform nennt man die **trigonometrische Form** der komplexen Zahlen.

Komplexe Zahlen

Darstellungsformen komplexer Zahlen:

Komponentenform
$z = a + bi$ bzw. $z = a + bj$

Polarform
$z = (r; \varphi)$ bzw. $z = r \underline{/\varphi}$

Trigonometrische Form
$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$
$z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$

Umrechnungen

Komponentenform in Polarkoordinaten

$z = a + bi \;\rightarrow\; z = (r; \varphi)$

Betrag: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$

Dabei gilt: $a > 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ und

$a < 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$

Polarform in Komponentenform

$z = (r; \varphi) \;\rightarrow\; z = a + bi$

Realteil: $a = r \cdot \cos(\varphi)$

Imaginärteil: $b = r \cdot \sin(\varphi)$

B **7.18** Stelle die komplexe Zahl z in Komponentenform dar, runde auf zwei Dezimalstellen.

a) $z = (6{,}6;\, 245°)$ **b)** $z = 3{,}5 \underline{/\frac{\pi}{2}}$

Lösung:

a) $a = r \cdot \cos(\varphi) \;\Rightarrow\; a = 6{,}6 \cdot \cos(245°) = -2{,}789...$
$b = r \cdot \sin(\varphi) \;\Rightarrow\; b = 6{,}6 \cdot \sin(245°) = -5{,}981...$
$z = (6{,}6;\, 245°) \approx -2{,}79 - 5{,}98i$

b) $a = 3{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$b = 3{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3{,}5$
$z = 3{,}5i$

BD **7.19** Erkläre, in welchem Quadranten bzw. auf welcher Achse die komplexe Zahl z liegt und gib den Bereich an, in dem der Winkel φ daher liegt. Ermittle anschließend die Polarform von z.

a) $z_1 = 1 + 3i$ **b)** $z_2 = 1{,}5 - 2i$ **c)** $z_3 = -4i$

Lösung:

a) z_1 liegt im 1. Quadranten, weil der Realteil und der Imaginärteil positiv sind. Für den Winkel gilt daher: $0° < \varphi < 90°$
$\tan(\varphi_1) = \frac{3}{1} = 3 \;\Rightarrow\; \varphi_1 = 71{,}565...° \approx 71{,}6°$
$r_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162...$
$z_1 = 1 + 3i \approx (3{,}2;\, 71{,}6°)$

b) z_2 liegt im 4. Quadranten, weil der Realteil positiv und der Imaginärteil negativ ist. Für den Winkel gilt daher: $270° < \varphi < 360°$
$\tan(\varphi_2) = \frac{-2}{1{,}5} = -1{,}\dot{3} \;\Rightarrow\; \varphi_2 = -53{,}130...° \triangleq 306{,}869...°$
$r_2 = \sqrt{1{,}5^2 + (-2)^2} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5 \;\Rightarrow\; z_2 = 1{,}5 - 2i \approx (2{,}5;\, 306{,}87°)$

c) z_3 liegt auf der negativen imaginären Achse. Der Winkel φ beträgt daher 270°.
$r_3 = 4$
$z_3 = -4i = (4;\, 270°)$

7.20 Stelle $z = -4 + 2j$ in trigonometrischer Form dar. Erstelle zuerst eine Skizze und dokumentiere deine Vorgehensweise.

BC

Lösung:

z liegt im 2. Quadranten $\Rightarrow$ $90° < \varphi < 180°$

$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$\tan(\varphi) = -\frac{2}{4} \Rightarrow \arctan\left(-\frac{2}{4}\right) = -26{,}565...°$

$\varphi = -26{,}565...° + 180° = 153{,}434...°$

$z = \sqrt{20} \cdot \cos(153{,}434...°) + \sqrt{20} \cdot j \cdot \sin(153{,}434...°)$

$z \approx \sqrt{20}\,(\cos(153{,}43°) + j \cdot \sin(153{,}43°))$

Berechnung des Betrags:
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Da die Arcustangensfunktion immer Winkel im 1. oder 4. Quadranten angibt, müssen zum Ergebnis 180° addiert werden.

Darstellung in Exponentialform $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

Im Jahr 1990 fand einer der originellsten Schönheitswettbewerbe der letzten Jahrzehnte statt. Die Leserinnen und Leser der Zeitschrift „The Mathematical Intelligencer" wählten die zehn schönsten mathematischen Sätze. Das Ergebnis dieser Wahl ist als Taschenbuch erschienen. Der Gewinner war der Satz „$e^{i\pi} = -1$" von Leonhard Euler, der erkannte, dass komplexe Zahlen mithilfe der Zahl e angegeben werden können.

Die **Euler'sche Formel** lautet $\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = e^{i \cdot \varphi}$. Mit ihrer Hilfe kann der „schönste Satz der Mathematik" bewiesen werden. Allgemein gilt, dass jede komplexe Zahl $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ in der Form $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ dargestellt werden kann. Der Winkel φ ist im **Bogenmaß** anzugeben, die Bezeichnung rad wird dabei üblicherweise nicht angeschrieben. Man findet in der Praxis auch die (streng mathematisch gesehen nicht korrekte) Angabe des Winkels im Gradmaß, zum Beispiel $z = e^{i \cdot 30°}$. Für weitere Berechnungen muss der Winkel dann ins Bogenmaß umgerechnet werden.

Darstellung in **Exponentialform**: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ bzw. $z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$
Euler'sche Formel: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ bzw. $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

7.21 Stelle $z = 10{,}65 \cdot e^{i \cdot 2{,}674}$ in der Form $z = a + bi$ dar.

B

Lösung:

$z = 10{,}65 \cdot (\cos(2{,}674) + i \cdot \sin(2{,}674))$

$z = 10{,}65 \cdot \cos(2{,}674) + i \cdot 10{,}65 \cdot \sin(2{,}674)$

$z \approx -9{,}51 + 4{,}80i$

- z in der trigonometrischen Schreibweise angeben.
- Ausmultiplizieren und runden.

TE

Technologieeinsatz: Eingabe und Darstellungsformen

TI-Nspire

Geogebra, Mathcad: www.verlaghpt.at

Komplexe Zahlen können in allen besprochenen Darstellungsformen eingegeben werden.

π	*i*	∞	*e*	θ
°	r	g	'	

komplexe Einheit i ... ***i***
Variable i ... **i**

- Die imaginäre Einheit i kann mithilfe des Symbols i aus der Pi-Palette eingegeben werden. Damit können komplexe Zahlen in Komponentenform angegeben werden.
  Beachte: Eine mithilfe der Taste **i** eingegebene Variable i wird **nicht** als die imaginäre Einheit ***i*** erkannt, eine solche Variable i wird fett, aber nicht kursiv angegeben.

Reell oder Komplex: Reell
Berechnungsmodus: Reell / Kartesisch / Polar
Vektorformat:

- Die Darstellungsform der Ausgabe kann unter **Allgemeine Einstellungen**, **Reell oder Komplex** gewählt werden, wobei die Auswahl **Kartesisch** für die Ausgabe in Komponentenform steht. Wird **Reell** gewählt, hängt das Format der Ausgabe vom gewählten Winkelmaß und der Form der Eingabe ab.

$(2\angle 45)$	$\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i$
$\left(2\angle\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i$

- Zur Eingabe in Polarform wird das als Sonderzeichen verfügbare Versor-Zeichen ∠ verwendet. Der Winkel kann dabei in Grad- oder Bogenmaß eingegeben werden.

$\left(2\angle\frac{\pi}{4}\right)$	$e^{\frac{i\cdot\pi}{4}}\cdot 2$
$e^{i\cdot 45°}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$

- Die Eingabe in Exponentialform erfolgt mithilfe der Euler'schen Zahl **e**, als Winkelmaß muss Bogenmaß eingestellt sein. Soll der Winkel trotzdem im Gradmaß angegeben werden, ist die Eingabe des °-Zeichens erforderlich.

real(2.5+3· *i*)	2.5
imag(2.5+3· *i*)	3.
angle(2+3· *i*)	56.3099
|2+3· *i*|	3.60555

- Über das Menü **2: Zahl**, **9: Komplex**, **2: Realteil** kann der Realteil einer komplexen Zahl ermittelt werden. Ebenso erhält man den Imaginärteil mit **3: Imaginärteil**, das Argument mit **4: Polarwinkel** und den Betrag mit dem Befehl **5: Betrag**.

(2+3· *i*)▶Polar	(3.60555 ∠ 56.3099)
((3.6 ∠ 56.3°))▶Rect	1.99744+2.99503· *i*

- Zur direkten Umrechnung von Komponenten- in Polarform bzw. umgekehrt stehen die Befehle **▶ Polar** und **▶ Rect** zur Verfügung, die im Menü **2: Zahl, 9: Komplex** zu finden sind oder eingetippt werden können, ▶ befindet sich im Sonderzeichenkatalog.

B **7.22** Gib die komplexe Zahl in allen anderen möglichen Darstellungsformen an, berücksichtige auch unterschiedliche Winkelmaße.

TE

a) $z = 3{,}4 + 7{,}5i$ **c)** $z = (0{,}5;\ 0{,}8\ \text{rad})$ **e)** $z = 12{,}3 \cdot (\cos(35°) + i \cdot \sin(35°))$
b) $z = 14{,}5\,\underline{/117°}$ **d)** $z = 4{,}8 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ **f)** $z = 5{,}6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

7.23 Gib die komplexen Zahlen z_1 bis z_6 in Komponentenform an. C

7.24 Gib an, auf welcher Achse bzw. in welchem Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene die gegebene Zahl liegt. AC

a) $z = 5 + 3i$ **c)** $z = -8$ **e)** $z = (5; 300°)$ **g)** $z = \left(7; \frac{5\pi}{4}\right)$

b) $z = (10; 180°)$ **d)** $z = (1; 270°)$ **f)** $z = (2; 172°)$ **h)** $z = (4{,}6; 320°)$

Aufgaben 7.25 – 7.26: Stelle die Zahlen als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

7.25 **a)** $z = -2 + i$ **c)** $z = 7 - 3i$ **e)** $z = 3 + j$ **g)** $z = j - 5$ B

b) $z = -i$ **d)** $z = -9 - 4i$ **f)** $z = -2j$ **h)** $z = -4 - 2j$

7.26 **a)** $z = (5; 68°)$ **b)** $z = (3{,}5; 270°)$ **c)** $z = (2; 172°)$ **d)** $z = (4{,}6; 320°)$ B

Aufgaben 7.27 – 7.28: Fertige jeweils eine Skizze der komplexen Zahl an.

7.27 Gib z in trigonometrischer Form an, arbeite ohne Taschenrechner. B

a) $z = -6$ **b)** $z = 8i$ **c)** $z = 10$ **d)** $z = -2{,}5i$

7.28 Gib z in der Form $z = a + bi$ an, arbeite ohne Taschenrechner. B

a) $z = (5; 180°)$ **b)** $z = (3; 90°)$ **c)** $z = (22{,}8; 0°)$ **d)** $z = (7{,}6; 270°)$

7.29 Stelle die angegebenen komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene dar und gib sie in Komponentenform und in Exponentialform an. Arbeite ohne Taschenrechner. B

$z_1 = 2\,\underline{/90°}$, $z_2 = 3\,\underline{/270°}$, $z_3 = 4 \cdot (\cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi))$

7.30 Begründe, welche der folgenden Behauptungen richtig sind bzw. welche es nicht sind. D

1) Ist $\text{Re}(z) = 0$, so ist $\arg(z) = 0$.

2) Alle komplexen Zahlen mit $\text{Im}(z) < 0$ liegen im 3. oder 4. Quadranten.

3) Liegt z im 2. Quadranten, so gilt: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$

4) Ist $\text{Im}(z) = 0$, so ist $\varphi = 0$ oder π.

7.31 Gib das Argument einer komplexen Zahl an, die auf der angegebenen Achse liegt. AC

1) positive reelle Achse **3)** positive imaginäre Achse

2) negative reelle Achse **4)** negative imaginäre Achse

Aufgaben 7.32 – 7.33: Gib die komplexen Zahlen in allen besprochenen Formen an.

7.32 **a)** $z = -11 + 3i$ **b)** $z = 9 - 2i$ **c)** $z = (8{,}1; 262{,}8°)$ **d)** $z = (5{,}8; 329{,}0°)$ B

7.33 **a)** $z = 3{,}6 \cdot e^{j \cdot 1{,}7}$ **b)** $z = 5{,}0 \cdot e^{j \cdot 0{,}45}$ **c)** $z = 105{,}0 \cdot (\cos(290{,}3°) + j \cdot \sin(290{,}3°))$ B

7.34 Ordne den gekennzeichneten Bereichen der Gauß'schen Zahlenebene jeweils die richtige Bedingung zu: **A)** $|z| \leq 2$; **B)** $\text{Re}(z) = 2$; **C)** $\text{Im}(z) < 2$; **D)** $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 2$ C

1) **2)** **3)** **4)**

7.35 Gib 5^i in der Form $z = a + bi$ an. Hinweis: $5 = e^{\ln 5}$ B

7.36 Beweise mithilfe der Euler'schen Formel den „schönsten Satz der Mathematik". Recherchiere die Besonderheit an diesem Satz. D

Komplexe Zahlen

7.3 Die Grundrechnungsarten in $\mathbb{C}$

7.3.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Für komplexe Zahlen gelten ähnliche Rechengesetze wie für reelle Zahlen. Es eignen sich allerdings bestimmte Darstellungsformen für gewisse Rechenoperationen besser als andere.

Die **Summe** bzw. die **Differenz** der komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ ist definiert als

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$ bzw. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$

Es werden jeweils die Realteile und Imaginärteile der Zahlen addiert bzw. subtrahiert.

Grafisch können komplexe Zahlen in Zeigerdarstellung wie Vektoren addiert bzw. subtrahiert werden.

ZB: **Addition**

$z_1 = 3 + 7i$

$z_2 = 6 - 2i$

$z_1 + z_2 = (3 + 7i) + (6 - 2i) =$

$= 3 + 7i + 6 - 2i =$

$= 3 + 6 + 7i - 2i$

$z_1 + z_2 = 9 + 5i$

ZB: **Subtraktion**

$z_1 = 3 + 7i$

$z_2 = 6 - 2i$

$z_1 - z_2 = (3 + 7i) - (6 - 2i) =$

$= 3 + 7i - 6 + 2i =$

$= 3 - 6 + 7i + 2i$

$z_1 - z_2 = -3 + 9i$

Da die Addition bzw. die Subtraktion zweier komplexer Zahlen in der Darstellung $z = a + bi$ erfolgt, müssen komplexe Zahlen in anderen Darstellungsformen zuerst in diese Form umgerechnet werden.

B **7.37** Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 5{,}831 \angle 329{,}036°$.

1) Berechne $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_2 - z_1$.

2) Kontrolliere deine Ergebnisse durch grafisches Addieren bzw. Subtrahieren.

Lösung:

1) $\mathrm{Re}(z_2) = 5{,}831 \cdot \cos(329{,}036°) =$

$= 5{,}00... \approx 5$

$\mathrm{Im}(z_2) = 5{,}831 \cdot \sin(329{,}036°) =$

$= -3{,}00... \approx -3$

$z_2 = 5 - 3i$

$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (5 - 3i)$

$z_1 + z_2 = 3 + 4i + 5 - 3i = 8 + i$

$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (5 - 3i)$

$z_1 - z_2 = 3 + 4i - 5 + 3i = -2 + 7i$

$z_2 - z_1 = (5 - 3i) - (3 + 4i)$

$z_2 - z_1 = 5 - 3i - 3 - 4i = 2 - 7i$

2)

7.38 Stelle $z = 3 + 4i$ und $w = 5 + 3i$ mithilfe von GeoGebra als komplexe Zeiger dar. Berechne $z_1 = w - z$ und stelle den Zeiger auf zwei Arten dar. B

Lösung:

- Solange keine Variable i verwendet wurde, interpretiert GeoGebra i als die imaginäre Einheit.
- Die komplexe Zahl wird als Punkt dargestellt. Um die Zeiger darzustellen, verwendet man Vektorbefehle (siehe Band 1, Abschnitt 9).
- Die beiden Zeiger, die die Differenz darstellen, werden automatisch mit a und b bezeichnet.

7.39 Gib zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ mit $a, b \neq 0$ an, deren Summe AB

1) i, ***2)*** 1, ***3)*** –i, ***4)*** –1 ergibt.

7.40 Berechne die Summe und die Differenz der beiden Zahlen. Überprüfe deine Ergebnisse durch grafisches Addieren und Subtrahieren. B

a) $z_1 = 2 + 3i;\ z_2 = -3 + i$ **c)** $z_1 = -4 - 2i;\ z_2 = 5 - 5i$ **e)** $z_1 = -5 + i;\ z_2 = 1 + 2i$
b) $z_1 = -2 + i;\ z_2 = 5 + 6i$ **d)** $z_1 = 3 + 2i;\ z_2 = -4$ **f)** $z_1 = 4 - 3i;\ z_2 = 3i$

7.41 Gegeben sind $z_1 = -3 - i;\ z_2 = 4 + 6i;\ z_3 = 5 - 2i;\ z_4 = -1;\ z_5 = -7i;\ z_6 = 2 - 4i;\ z_7 = 8i$. Berechne zuerst den gesuchten Term und veranschauliche dann den Rechengang grafisch. B

a) $z_1 - z_3 + z_2 - z_6$ **c)** $z_5 + z_7 + z_4 - z_1$ **e)** $z_3 - z_5 + z_4 - z_1$
b) $z_3 + z_6 - z_4 - z_2$ **d)** $z_7 - z_1 + z_5 - z_6$ **f)** $z_4 + z_2 - z_3 + z_7$

7.42 Berechne die Summe und die Differenz der beiden Zahlen. Überprüfe deine Ergebnisse durch grafisches Addieren bzw. Subtrahieren. B

a) $z_1 = (5; 30°);\ z_2 = (1{,}4; 45°)$ **c)** $z_1 = (12; 145°);\ z_2 = (3; 90°)$ **e)** $z_1 = 2 \cdot e^{2{,}5j};\ z_2 = 4 \cdot e^{3{,}7j}$
b) $z_1 = (1; 12°);\ z_2 = (8; 4°)$ **d)** $z_1 = 14 \cdot e^{1{,}73j};\ z_2 = 8 \cdot e^{2{,}46j}$ **f)** $z_1 = e^{1{,}35j};\ z_2 = 6 \cdot e^{0{,}66j}$

7.43 Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Gib jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an und begründe deine Antworten. ABD

1) Die Summe von zwei imaginären Zahlen kann eine reelle Zahl sein.
2) Die Differenz von zwei imaginären Zahlen ist ausnahmslos eine imaginäre Zahl.
3) Die Summe von zwei komplexen Zahlen kann rein reell sein.
4) Die Differenz von zwei komplexen Zahlen kann rein imaginär sein.

7.44 Arbeite mit der Abbildung. ABC

1) Ermittle den Betrag von $|z_1 - z_2|$.
2) Berechne die Länge des roten Zeigers und vergleiche sie mit dem Ergebnis aus ***1)***.
3) Formuliere anhand der obigen Überlegungen, wie man $|z_1 - z_2|$ allgemein grafisch interpretieren kann.

7.45 Skizziere die komplexen Zahlen $z_1 = r\angle 0°$, $z_2 = r\angle 90°$ und $z_3 = z_1 + z_2$ in der Gauß'schen Zahlenebene. Gib die Polarform von z_3 an, ohne vorher auf Komponentenform umzurechnen. BC

7.3.2 Multiplikation komplexer Zahlen

Multiplikation in Komponentenform $z = a + bi$

Sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ in Komponentenform gegeben, so können sie wie Binome multipliziert werden.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = \\ &= a \cdot c + b \cdot i \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot i \cdot d \cdot i = \\ &= ac + bc \cdot i + ad \cdot i + bd \cdot i^2 = ac + bc \cdot i + ad \cdot i - bd = \\ &= ac - bd + (bc + ad) \cdot i \end{aligned}$$

• $i^2 = -1$

Multiplikation in Komponentenform

Die komplexen Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = c + di$ werden wie Binome multipliziert, wobei $i^2 = -1$ berücksichtig wird.

B **7.46** Berechne $z = (2 + 3i) \cdot (4 - 7i)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} z &= (2 + 3i) \cdot (4 - 7i) = 2 \cdot 4 + 3i \cdot 4 - 2 \cdot 7i - 3i \cdot 7i = \\ &= 8 + 12i - 14i - 21i^2 = 8 + 12i - 14i + 21 = 29 - 2i \end{aligned}$$

Multiplikation in Exponentialform $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ und in Polarform $z = (r; \varphi)$

Die Multiplikation in Exponentialform erfolgt nach den Rechenregeln für Potenzen.

$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}, z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_1 + i \cdot \varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$

Bei der Multiplikation werden also die **Beträge** der beiden Zahlen miteinander **multipliziert** und die **Argumente addiert**.

Schreibweise in Polarform:

$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \underline{/\varphi_1}) \cdot (r_2 \underline{/\varphi_2}) = (r_1 \cdot r_2) \underline{/(\varphi_1 + \varphi_2)}$ bzw.

$z_1 \cdot z_2 = (r_1; \varphi_1) \cdot (r_2; \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$

Um den Hauptwert zu erhalten, muss man gegebenenfalls Vielfache von 2π bzw. 360° subtrahieren.

Wie die grafische Darstellung verdeutlicht, entspricht die Multiplikation zweier komplexer Zahlen einer **Drehstreckung**. Dabei wird der Zeiger z_1 um den Faktor $|z_2| = r_2$ gestreckt und gleichzeitig um den Winkel φ_2 gedreht.

Die **Multiplikation komplexer Zahlen** entspricht einer Drehstreckung.
Die Multiplikation mit i bzw. j entspricht einer Drehung um 90° in positiver Richtung.

Exponentialform

$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}, z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$	$z_1 = r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}, z_2 = r_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}$
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$

Polarform und trigonometrische Form

$z_1 = (r_1; \varphi_1), z_2 = (r_2; \varphi_2)$	$z_1 = r_1 \underline{/\varphi_1}, z_2 = r_2 \underline{/\varphi_2}$
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \underline{/(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

7.47 Berechne das Produkt der Zahlen: $z_1 = 4{,}5 \cdot e^{i \cdot 5{,}0}$ und $z_2 = 1{,}8 \cdot e^{i \cdot 4{,}0}$ B

Lösung:

$z_1 \cdot z_2 = 4{,}5 \cdot e^{i \cdot 5{,}0} \cdot 1{,}8 \cdot e^{i \cdot 4{,}0} =$

$= 4{,}5 \cdot 1{,}8 \cdot e^{i \cdot 5{,}0} \cdot e^{i \cdot 4{,}0} =$

$= 8{,}1 \cdot e^{i \cdot 9} = 8{,}1 \cdot e^{i \cdot (9 - 2\pi)}$

$z_1 \cdot z_2 \approx 8{,}1 \cdot e^{i \cdot 2{,}7}$ ... Hauptwert

- Die Beträge werden multipliziert, die Winkel werden addiert.
- Hauptwert von $z_1 \cdot z_2$ berechnen.

7.48 Beschreibe, wie sich der Zeiger $z = r\,\underline{/\varphi}$ verändert, wenn man ihn mit j multipliziert. BC

Lösung:

$j = 1\,\underline{/90°}$

$z \cdot j = (r \cdot 1)\,\underline{/(\varphi + 90°)} =$

$= r\,\underline{/(\varphi + 90°)}$

Durch die Multiplikation mit j wird der Zeiger um 90° in positiver Richtung gedreht.

Konjugiert komplexe Zahlen und deren Multiplikation

Unterscheiden sich zwei komplexe Zahlen lediglich durch das Vorzeichen des Imaginärteils, also $z = a + bi$ und $z^* = a - bi$, so nennt man **z^*** die **konjugiert komplexe Zahl** zu **z**. Grafisch interpretiert entspricht das einer Spiegelung an der reellen Achse.

Die Zeiger von **z** und **z^*** sind gleich lang, der Winkel $\varphi^* = -\varphi$.

Oft wird statt z^* die (nicht normgerechte) Schreibweise $\bar{z}$ verwendet.

Multipliziert man $z = r\,\underline{/\varphi}$ mit $z^* = r\,\underline{/-\varphi}$, so gilt:

$z \cdot z^* = (r \cdot r)\,\underline{/(\varphi + (-\varphi))} = r^2\,\underline{/0} \Rightarrow z \cdot z^* = |z|^2$

Die **Multiplikation zweier konjugiert komplexer Zahlen** $z = a + bi$ und $z^* = a - bi$ ergibt immer eine reelle Zahl, und zwar das Quadrat des Betrags von z.

$$z \cdot z^* = |z|^2 = a^2 + b^2$$

Aufgaben 7.49 – 7.51: Berechne jeweils das Produkt der beiden Zahlen.

7.49 **a)** $z_1 = 7 - 3i$; $z_2 = -1 + 5i$ **b)** $z_1 = 18 - i$; $z_2 = -14 + 22i$ **c)** $z_1 = 4 + 6i$; $z_2 = 9 - 2i$ B

7.50 **a)** $z_1 = (2; 15°)$; $z_2 = (7; 53°)$ **b)** $z_1 = (3; 240°)$; $z_2 = (6; 265°)$ **c)** $z_1 = 2\,\underline{/35°}$; $z_2 = 4\,\underline{/\tfrac{\pi}{6}}$ B

7.51 **a)** $z_1 = 13 \cdot e^{j \cdot 0{,}8}$; $z_2 = e^{j \cdot 0{,}6}$ **b)** $z_1 = 3{,}4 \cdot e^{j \cdot 1{,}43}$; $z_2 = 4 \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{4}}$ B

7.52 Multipliziere $z = -4 + 7i$ mit den angegebenen Zahlen. Wie können diese Multiplikationen grafisch interpretiert werden? BC

1) $z_1 = -i$ **2)** $z_2 = \left(1; \tfrac{\pi}{2}\right)$ **3)** $z_3 = -1$ **4)** $z_4 = 2\,\underline{/90°}$ **5)** $z_5 = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$

7.53 Ermittle $z \cdot z^*$. B

a) $z = 3 + 5i$ **b)** $z = 4i$ **c)** $z = 1 + i$ **d)** $z = 3i - 4$ **e)** $z = 5$

7.54 Formuliere die angegebenen Zusammenhänge mit eigenen Worten und beweise sie. CD

a) $z + z^* = 2a$ **b)** $z - z^* = 2bi$

Komplexe Zahlen

ABCD **7.55** Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche nicht? Gib jeweils Beispiele bzw. Gegenbeispiele an und begründe deine Antworten.

1) Der Multiplikation einer komplexen Zahl mit (–j) entspricht eine Drehung um 90° in negative Richtung.

2) Wird eine komplexe Zahl mit einer reellen Zahl multipliziert, ändert sich das Argument, nicht aber der Betrag der Zahl.

3) Für alle komplexen Zahlen gilt: $Re(z_1 \cdot z_2) = Re(z_1) \cdot Re(z_2)$

4) Ist $z_1 \cdot z_2$ eine reelle Zahl, so müssen z_1 und z_2 zueinander konjugiert komplex sein.

5) Sind z_1 und z_2 zueinander konjugiert komplex, so ist $z_1 \cdot z_2$ eine reelle Zahl.

BD **7.56** Für welche Zahl z_2 hat die Multiplikation das angegebene Ergebnis? Begründe deine Antwort.

a) $z_1 = a + bi;\ z_1 \cdot z_2 = -b + ai$ **c)** $z_1 = r\underline{/\varphi};\ z_1 \cdot z_2 = 1\underline{/0}$

b) $z_1 = r\underline{/\varphi};\ z_1 \cdot z_2 = 2r\underline{/\varphi}$ **d)** $z_1 = a + bi;\ z_1 \cdot z_2 = 2b - 2ai$

BCD **7.57** **1)** Beschreibe anhand der Abbildung mit eigenen Worten, wie komplexe Zahlen grafisch multipliziert werden können.

2) Multipliziere $z_1 = 1 + 3i$ mit $z_2 = 2 + 1{,}5i$ grafisch und überprüfe dein Ergebnis durch eine Rechnung.

AB **7.58** TE Erstelle in GeoGebra eine Animation, in der sich das Dreieck mit den Eckpunkten A(2|3), B(–4|1) und C(0|0) um den Punkt C dreht. Arbeite dabei mit der Multiplikation komplexer Zahlen.

Lösung:

- Die Eckpunkte des Dreiecks werden als komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene interpretiert. Bei der Eingabe, zB **A = 2 + 3i**, werden die Punkte automatisch dargestellt. Das Dreieck wird mithilfe von **Werkzeug Vieleck** erstellt.
- Der Drehung entspricht die Multiplikation mit $z = 1\underline{/\varphi}$. Für **phi** wird ein Schieberegler definiert, der von 0° bis 360° läuft. Danach wird die Variable z in Polarkoordinaten eingegeben, indem ein **;** als Trennzeichen verwendet wird: **z = (1;phi)**
- Die Eckpunkte des rotierenden Dreiecks werden jeweils durch Multiplizieren mit z ermittelt, zB: **A2 = A*z**
- Wird der Schieberegler auf einen beliebigen Wert ≠ 0 eingestellt, kann mithilfe von **Werkzeug Vieleck** das Dreieck mit den Eckpunkten A2, B2 und C2 eingezeichnet werden.
- Beim Schieberegler kann mittels rechter Maustaste **Animation ein** aktiviert werden, sodass sich das Dreieck dreht.

AB **7.59** TE Ändere die Animation aus 7.58 so ab, dass

a) das Dreieck gegen den Uhrzeigersinn rotiert und dabei kontinuierlich größer wird.

b) das Dreieck um den Eckpunkt A rotiert. Hinweis: B2 = (B – A) · z + A, C2 analog.

7.3.3 Division komplexer Zahlen

Die Division ist wie die Multiplikation in allen Darstellungsformen möglich. Wie bei den reellen Zahlen wird vorausgesetzt, dass der Divisor ungleich null ist.

Division in Komponentenform $z = a + bi$

Der Quotient zweier komplexer Zahlen $z = \frac{a + bi}{c + di}$ ist im Allgemeinen keine reelle Zahl. Damit der Quotient in der Form $z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ angegeben werden kann, muss der Bruch so umgeformt werden, dass im Nenner eine reelle Zahl steht.

Es wurde bereits gezeigt, dass das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen eine reelle Zahl ist:

$$(c + di) \cdot (c - di) = c^2 - d^2 i^2 = c^2 + d^2$$

Wird nun der Bruch $z = \frac{a + bi}{c + di}$ mit $(c - di)$ erweitert, so erhält man eine reelle Zahl im Nenner und kann Realteil und Imaginärteil der Zahl getrennt angeben, zB:

$$\frac{13 - i}{3 + 5i} = \frac{(13 - i)}{(3 + 5i)} \cdot \frac{(3 - 5i)}{(3 - 5i)} =$$

- Der Bruch wird mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert.

$$= \frac{39 - 3i - 65i + 5i^2}{3^2 - (5i)^2} = \frac{39 - 3i - 65i - 5}{3^2 + 5^2} =$$

- Im Nenner erhält man dadurch eine reelle Zahl („Quadrat des Realteils + Quadrat des Imaginärteils").

$$= \frac{34 - 68i}{9 + 25} = \frac{34 - 68i}{34} =$$

$$= \frac{34}{34} - \frac{68i}{34} = 1 - 2i$$

- Nun kann man Realteil und Imaginärteil getrennt anschreiben.

> Bei der **Division** $\frac{z_1}{z_2}$ mit $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ wird der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners $z_2^* = c - di$ erweitert.
> Das Ergebnis wird in der Form $z = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ angegeben.

7.60 Ermittle den Kehrwert von $z = a + bi$ in Komponentenform. Welchen Zusammenhang kannst du aufgrund des Ergebnisses erkennen?

BC

Lösung:

$$z = a + bi \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a - bi) \cdot (a + bi)} =$$

- Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners.

$$= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Bildet man den Kehrwert einer komplexen Zahl, so erhält man die konjugiert komplexe Zahl, gebrochen durch das Quadrat des Betrags der Zahl.

Division in Exponentialform $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ und in Polarform $z = (r; \varphi)$

Die Division erfolgt wie die Multiplikation nach den Rechenregeln für Potenzen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{e^{i \cdot \varphi_1}}{e^{i \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(i \cdot \varphi_1 - i \cdot \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bei der Division komplexer Zahlen in Polarform bzw. trigonometrischer Form werden die **Beträge** der beiden Zahlen **dividiert** und die **Argumente subtrahiert**.

ZB: $z_1 = 8 \cdot e^{j \cdot \pi}$; $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$; $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{4}}$

Komplexe Zahlen

Division komplexer Zahlen

Exponentialform

$z_1 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}$ | $z_1 = r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$ | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$

Polarform und trigonometrische Form

$z_1 = (r_1; \varphi_1)$, $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ | $z_1 = r_1 \angle \varphi_1$, $z_2 = r_2 \angle \varphi_2$

$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right)$ | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

B **7.61** Berechne den Quotienten der beiden Zahlen $z_1 = 18 \cdot e^{i \cdot 0{,}29}$ und $z_2 = 8 \cdot e^{i \cdot 1{,}03}$.

Lösung:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{18 \cdot e^{i \cdot 0{,}29}}{8 \cdot e^{i \cdot 1{,}03}} = \frac{18}{8} \cdot e^{i \cdot (0{,}29 - 1{,}03)}$

$\frac{z_1}{z_2} = 2{,}25 \cdot e^{i \cdot (-0{,}74)} = 2{,}25 \cdot e^{i \cdot 5{,}543...}$

$\frac{z_1}{z_2} \approx 2{,}25 \cdot e^{i \cdot 5{,}54}$

- Die Beträge werden dividiert, die Winkel werden subtrahiert.
- Die Addition von 2π liefert den Hauptwert.

BD **7.62** Zeige, dass gilt: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Lösung:

$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi} \Rightarrow |z| = r$

$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot e^{j \cdot 0}}{r \cdot e^{j \cdot \varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{j \cdot (-\varphi)} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$ q.e.d.

- quod erat demonstrandum (latein: was zu sagen war)

B **7.63** Berechne jeweils den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$.

a) $z_1 = 6 + 7i$; $z_2 = -i$ **c)** $z_1 = -3 - 9i$; $z_2 = i$ **e)** $z_1 = 23 - i$; $z_2 = -3i$
b) $z_1 = 1$; $z_2 = -9 + 5j$ **d)** $z_1 = j$; $z_2 = -3 + 11j$ **f)** $z_1 = -j$; $z_2 = 7 + 15j$

Aufgaben 7.64 – 7.66: Berechne jeweils die Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ und $\frac{z_2}{z_1}$.

B **7.64** **a)** $z_1 = 32 + 2i$; $z_2 = 4 - 4i$ **b)** $z_1 = 3 \angle \frac{\pi}{6}$; $z_2 = 4{,}5 \angle 1{,}3$ **c)** $z_1 = 7{,}7 \angle 80°$; $z_2 = 2 \angle 2°$

B **7.65** **a)** $z_1 = (1{,}3; 4°)$; $z_2 = (2; 77°)$ **b)** $z_1 = (2{,}6; 120°)$; $z_2 = (24; 256°)$ **c)** $z_1 = (7{,}7; 80°)$; $z_2 = (2; 2°)$

B **7.66** **a)** $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot 0{,}5}$; $z_2 = 9 \cdot e^{i \cdot 0{,}6}$ **b)** $z_1 = 10 \cdot e^{i \cdot 0{,}8}$; $z_2 = 6 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{8}}$ **c)** $z_1 = 4{,}5 \cdot e^{i}$; $z_2 = e^{i \cdot 4{,}5}$

BC **7.67** Gib $\frac{1}{z}$ in Komponentenform und in Polarform an. Dokumentiere deine Überlegungen.

a) $z = i$ **b)** $z = -3i$ **c)** $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ **d)** $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45°$

BD **7.68** Begründe, durch welche komplexe Zahl man z dividieren muss, um w zu erhalten.

a) $z = r \angle \varphi$, $w = 1 \angle \varphi$ **b)** $z = a + bi$, $w = b - ai$ **c)** $z = e^{i\varphi}$, $w = r$

BCD **7.69** **1)** Beschreibe mit eigenen Worten, wie $\frac{z_1}{z_2}$ grafisch dargestellt werden kann.

2) Dividiere grafisch $\frac{z_1}{z_2}$. Überprüfe durch eine Rechnung.

a) $z_1 = 5 + 12$; $z_2 = (4; 35°)$ **b)** $z_1 = (10; 50°)$; $z_2 = 2i$

Verbindung der vier Grundrechnungsarten

7.70 Gegeben ist die komplexe Zahl z. Berechne $z + \frac{1}{z}$. B

a) $9 - 7i$ **b)** $-3 + 5i$ **c)** $(6{,}5; 32°)$ **d)** $8{,}3\,\underline{/80°}$ **e)** $4 \cdot e^{i \cdot 1{,}3}$ **f)** $e^{i \cdot 5{,}35}$

7.71 Gegeben ist die komplexe Zahl z. Berechne $z - \frac{1}{z}$. B

a) $-1 + 3i$ **b)** $13 - 7i$ **c)** $27{,}7\,\underline{/39°}$ **d)** $(13{,}4; 41°)$ **e)** $8{,}1 \cdot e^{i \cdot 4{,}44}$ **f)** $e^{i \cdot 3{,}21}$

7.72 Gib das Ergebnis in Polarform an. B

$z_1 = 10 + 3i$, $z_2 = 9 - i$, $z_3 = -4 - 7i$ und $z_4 = -2 + 5i$

a) $2z_1 \cdot z_3 - 3z_4 + 1$ **b)** $4 - z_2 - z_4 \cdot z_1 - 7i$ **c)** $z_3 \cdot z_2 \cdot z_1 + z_4 + 5$ **d)** $-z_4 \cdot z_1 + 5z_4 - i$

7.73 Führe die Berechnungen in Komponentenform durch. B

$z_1 = 5 + 12i$, $z_2 = 7 - 13i$, $z_3 = 24i$ und $z_4 = -8 + 5i$

a) $z_2 : z_1 - z_3 : z_4$ **b)** $z_1 \cdot z_4 + z_3 \cdot z_2$ **c)** $z_1 : z_2 - z_3 \cdot z_4$ **d)** $z_4 \cdot z_2 + z_1 : z_3$

7.74 Gib das Ergebnis in allen besprochenen Darstellungsformen an. B

$z_1 = 8 + 4i$, $z_2 = (18{,}6; 126{,}25°)$ und $z_3 = 17 \cdot e^{i \cdot 0{,}231}$

a) $(z_3 - z_2) \cdot z_3 + z_1$ **b)** $z_3 \cdot (z_1 + z_2) : z_2$ **c)** $(z_1 : z_3) : (z_2 + z_1)$ **d)** $(z_3 + z_1) : z_3 - z_1$

7.75 Gib Re(z) und Im(z) an. B

a) $z = \frac{j}{1 + bj} + j$ **b)** $z = \frac{1 + aj}{a - j}$ **c)** $z = j \cdot \left(a + \frac{1}{bj}\right)$ **d)** $z = \frac{1}{bj} + \frac{cj}{d}$

7.76 Gibt es eine reelle Zahl a, sodass $z = 1 + \frac{1 + aj}{2a - j}$ eine reelle Zahl ist? Begründe deine Antwort. ABD

Vermischte Aufgaben

7.77 Welche der Behauptungen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antwort und gib Beispiele bzw. Gegenbeispiele an. BCD

Für alle komplexen Zahlen w, z gilt:

1) $w^* + z^* = (w + z)^*$ **3)** $(z^*)^* = -z$ **5)** $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)}$

2) $\mathrm{Im}(w^*) = -\mathrm{Im}(w)$ **4)** $|-z| = |z^*|$ **6)** $\arg(z \cdot z^*) = 0$

7.78 Wie müssen a und b gewählt werden, damit $z = \frac{1}{z^*}$ gilt? Nenne drei Beispiele. AB

7.79 **1)** Zeige für $z = -4 + 12i$, dass gilt: $1 - z^* = (1 - z)^*$ BD

2) Beweise allgemein die Gültigkeit dieser Aussage.

7.80 Es gilt $\left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}$. Prüfe dies für $z = 8 - 7i$ nach und beweise allgemein. BD

7.81 Beweise, dass für $z_2 \neq 0$ gilt: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ D

7.82 Welchen Winkel schließen die Zeiger der beiden komplexen Zahlen ein? AC

a) z und z^* **b)** z und $-z^*$ **c)** z und $\frac{1}{z}$

7.83 Eine komplexe Zahl z liegt im 2. Quadranten. In welchem Quadranten liegt dann AC

a) $-z$? **b)** $\frac{1}{z}$? **c)** $-z^*$?

7.84 Kennzeichne alle Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene, die die Bedingung erfüllen. ABC

a) $|z| - 1 < 4$ **b)** $z \cdot z^* = 9$ **c)** $z + z^* = 4$ **d)** $\mathrm{Im}(z + 2z^*) = 9$

7.4 Potenzen komplexer Zahlen

7.4.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

B **7.85** Berechne durch Ausmultiplizieren. **1)** $(5 + i)^2$ **2)** $(7; 11{,}3°)^2$ **3)** $(3{,}5 \cdot e^{i \cdot 0{,}66})^2$

Komplexe Zahlen können in allen Darstellungsformen multipliziert und daher auch potenziert werden. Ist z in Komponentenform gegeben, kann $z^n = (a + bi)^n$ mithilfe der binomischen Formeln berechnet werden. Da das im Allgemeinen zeitaufwändig ist, werden komplexe Zahlen meist in Exponentialform bzw. Polarform potenziert. Es gilt:

$z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ bzw. $z = e^{j \cdot \varphi}$

$z^n = (r \cdot e^{i \cdot \varphi})^n = r^n \cdot (e^{i \cdot \varphi})^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$ bzw. $z^n = r^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi}$

- Die Rechenregeln für Potenzen gelten auch für komplexe Zahlen.

Eine komplexe Zahl wird also potenziert, indem man den **Betrag potenziert** und das **Argument** mit dem Exponenten **multipliziert**. Analog gilt daher für die weiteren Schreibweisen:

$z = (r; \varphi) \rightarrow z^n = (r^n; n \cdot \varphi)$ bzw. $z = r \underline{/\varphi} \rightarrow z^n = r^n \underline{/n \cdot \varphi}$

$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \rightarrow z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

Das Potenzieren in trigonometrischer Form wurde bereits im 18. Jh. angewendet. Die Formel wurde für r = 1 von Abraham de Moivre (französischer Mathematiker, 1667 – 1754) aufgestellt.

Komplexe Zahlen werden **potenziert**, indem man den Betrag potenziert und das Argument mit dem Exponenten multipliziert.

Exponentialform: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$ bzw. $z^n = r^n \cdot e^{j \cdot n \cdot \varphi}$

Polarform: $z^n = (r^n; n \cdot \varphi)$ bzw. $z^n = r^n \underline{/n \cdot \varphi}$

Trigonometrische Form: $z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$ bzw.
$z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + j \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

Satz von de Moivre: $(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

B **7.86** Berechne z^{17} für $z = -1{,}2 + 0{,}5i$.

Lösung:

$z = 1{,}3 \underline{/157{,}38...°}$
- Die Zahl wird in Polarform angegeben.

$z^{17} = 1{,}3^{17} \underline{/157{,}38...° \cdot 17} =$

$= 1{,}3^{17} \cdot (\cos(157{,}38...° \cdot 17) + i \cdot \sin(157{,}38...° \cdot 17))$

$z^{17} \approx -78{,}69 + 35{,}92i$

- Der Betrag wird mit dem Exponenten potenziert. Der Winkel wird mit dem Exponenten multipliziert.

B **7.87** Berechne mithilfe der binomischen Formeln und in Polarform. Vergleiche deine Ergebnisse.
a) $(2 + 5i)^2$ **b)** $(i - 1)^3$ **c)** $(-2 + 3i)^2$ **d)** $(-2 - 3i)^3$

B **7.88** Berechne die Potenz und stelle sie **1)** in Komponentenform, **2)** in Polarform dar.
a) $(1 + 3i)^5$ **c)** $(3{,}3 \underline{/20°})^3$ **e)** $\left(4; \frac{\pi}{3}\right)^5$ **g)** $(2 \cdot e^{2{,}5i})^5$
b) $(-2 + 4{,}3i)^4$ **d)** $(0{,}8 \underline{/1{,}4})^6$ **f)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 45°\right)^2$ **h)** $(1{,}2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}})^4$

AB **7.89** Für welche Werte von n ist $(2 \underline{/45°})^n$ **1)** eine rein reelle, **2)** eine rein imaginäre Zahl?

AB **7.90** Für welche Werte von a liegt $\left(1 \underline{/\frac{a\pi}{2}}\right)^3$ auf der **1)** positiven, **2)** negativen imaginären Achse?

BD **7.91** Zeige, dass $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ gilt.

7.4.2 Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

Bereits zu Beginn des Abschnitts haben wir festgestellt, dass die Definition der komplexen Einheit als $i^2 = -1$ Auswirkungen auf den Umgang mit Wurzeln hat. Im Folgenden wird diese Problematik nun genauer untersucht.

ZB: z^3 wird für $z_1 = 2\angle 30°$, $z_2 = 2\angle 150°$ und $z_3 = 2\angle 270°$ ermittelt und in der Form $z = a + bi$ angegeben.

$z_1 = (2, 30°)^3 = (2^3; 3 \cdot 30°) = (8; 90°) = 8i$
$z_2 = (2, 150°)^3 = (2^3; 3 \cdot 150°) = (8; 450°) = 8i$
$z_3 = (2, 270°)^3 = (2^3; 3 \cdot 270°) = (8; 810°) = 8i$

In allen drei Fällen erhalten wir als Ergebnis für die dritte Potenz $z = 8i$.

Ist nun umgekehrt z mit $z^3 = 8i$ gesucht, müssen also drei Lösungen z_1, z_2 und z_3 gefunden werden. Um die Rechenregeln für das Potenzieren komplexer Zahlen anwenden zu können, wird die Zahl in Polarform angegeben: $8i = 8\angle 90°$. Nun gilt:

$(8\angle 90°)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\angle \frac{90°}{3} = \sqrt[3]{8}\angle 30° \Rightarrow z_1 = 2\angle 30°$

- $8\angle 90°$ ist der Hauptwert des komplexen Zeigers $z = 8i$, Wurzelziehen führt auf die Lösung z_1.

$(8\angle(90° + 360°))^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\angle \frac{450°}{3} = \sqrt[3]{8}\angle 150° \Rightarrow z_2 = 2\angle 150°$

- Arbeitet man nicht mit dem Hauptwert, sondern mit einem um 360° größeren Winkel, so erhält man die Lösung z_2.

$(8\angle(90° + 2 \cdot 360°))^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\angle \frac{810°}{3} = \sqrt[3]{8}\angle 270° \Rightarrow z_3 = 2\angle 270°$

- Die Lösung z_3 erhält man, wenn man den Hauptwert um $2 \cdot 360°$ vergrößert und anschließend die Wurzel berechnet.

Die Argumente der drei Lösungen unterscheiden sich jeweils um $\frac{360°}{3} = 120°$ voneinander. Das nochmalige Addieren von 360° würde auf eine Lösung führen, die sich von der ersten um $3 \cdot 120° = 360°$ unterscheidet, also die gleiche komplexe Zahl beschreibt wie die erste Lösung.

Als die **n-ten Wurzeln** $z = \sqrt[n]{a + bi}$ bzw. $z = \sqrt[n]{(r; \varphi)}$ einer komplexen Zahl bezeichnet man alle n verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = a + bi$ bzw. $z^n = (r; \varphi)$.

$z_1 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right) \quad z_2 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{1 \cdot 360°}{n}\right) \quad z_3 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n}\right) \quad \ldots \quad z_n = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}\right)$

Das Berechnen der Quadratwurzel einer komplexen Zahl führt daher auf zwei Lösungen z_1 und z_2. Die Argumente dieser beiden Lösungen unterscheiden sich um $\frac{360°}{2} = 180°$, daher gilt $z_1 = -z_2$.

ZB: $\sqrt{4i}$ ist gesucht.

$z_1 = \sqrt{4\angle 90°} = 2\angle 45°$; $z_2 = \sqrt{4\angle(90° + 360°)} = 2\angle 225°$

7.92 Berechne $z = \sqrt[4]{-6 + 8i}$ und dokumentiere den Lösungsweg mit eigenen Worten. BC

Lösung:

$-6 + 8i = 10\angle 126{,}8\ldots°$

$z_1 = \sqrt[4]{10}\angle 31{,}7\ldots° \approx 1{,}51 + 0{,}93i$

$z_2 = \sqrt[4]{10}\angle(31{,}7\ldots° + 90°) \approx -0{,}93 + 1{,}51i$

$z_3 = \sqrt[4]{10}\angle(31{,}7\ldots° + 2 \cdot 90°) \approx -1{,}51i - 0{,}93$

$z_4 = \sqrt[4]{10}\angle(31{,}7\ldots° + 3 \cdot 90°) \approx 0{,}93 - 1{,}51i$

Die Zahl unter der Wurzel wird in Polarform angegeben.
1. Lösung: Aus dem Radius die 4. Wurzel ziehen, den Winkel durch 4 dividieren.
Für die drei weiteren Lösungen jeweils $\frac{360°}{4} = 90°$ zum Winkel addieren.

Komplexe Zahlen

Grafische Interpretation der Lösungen der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$

Trägt man die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$ in die Gauß'sche Zahlenebene ein, so kann man zwei Eigenschaften erkennen:

- Alle Lösungen liegen auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$.
- Die n Lösungen sind die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.

Im(z)
Re(z)
1

Die Abbildung zeigt die Lösungen der Gleichung $z^5 = 1$, die – miteinander verbunden – ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Allgemein werden die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ als die n-ten **Einheitswurzeln** bezeichnet. Damit können beliebige regelmäßige n-Ecke (näherungsweise) gezeichnet werden, auch solche, deren Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

BD **7.93** ***1)*** Berechne die Lösungen der Gleichung $z^4 = 16i$.
2) Begründe mit eigenen Worten, warum die Lösungen ein Quadrat bilden müssen. Überprüfe dies durch eine Zeichnung in GeoGebra und beschreibe dein Vorgehen.

TE

Lösung:
1) $z^4 = 16i = 16 \angle 90°$

$z_1 = \sqrt[4]{16} \angle \frac{90°}{4} =$

$= 2 \angle 22{,}5° \approx 1{,}85 + 0{,}77i$

$z_2 = 2 \angle 112{,}5° \approx -0{,}77 + 1{,}85i$

$z_3 = 2 \angle 202{,}5° \approx -1{,}85 - 0{,}77i$

$z_4 = 2 \angle 292{,}5° \approx 0{,}77 - 1{,}85i$

2) Die Punkte müssen ein Quadrat bilden, da der Betrag gleich bleibt und der Winkel jeweils um 90° erhöht wird.

Eingabe: Z1=(1.85,0.77)

Im(z), Re(z), Z1, Z2, z3, z4, B, C

Eingabe: z4=(0.77;-1.85)

Die Endpunkte der Zeiger bilden ein Quadrat.

Die Punkte Z1 und Z2 werden eingegeben (eingegebener Name beginnt mit Großbuchstaben). Ein Quadrat wird durch Z1 und Z2 mithilfe von **Werkzeug für Vielecke**, **Regelmäßiges Vieleck** gezeichnet. Um die Zeiger z3 und z4 darzustellen, werden sie als Vektoren eingegeben (Name ist ein Kleinbuchstabe).

BC **7.94** Berechne die Ergebnisse in Komponentenform und in Polarform im Kopf und dokumentiere deine Überlegungen.
a) $z = \sqrt{1}$ ***b)*** $z = \sqrt{i}$ ***c)*** $z = \sqrt{-1}$ ***d)*** $z = \sqrt{-i}$

B **7.95** Gib die Lösungen ***1)*** in Komponentenform, ***2)*** in Polarform, ***3)*** in Exponentialform an.
a) $z = \sqrt[3]{-1-2i}$ ***b)*** $z = \sqrt[5]{16+82i}$ ***c)*** $z = \sqrt[6]{-64}$ ***d)*** $z = \sqrt[5]{-243}$

BD **7.96** Berechne ***1)*** $x = \sqrt{16}, x \in \mathbb{R}$ und ***2)*** $z = \sqrt{16}, z \in \mathbb{C}$. Ist das Ergebnis in beiden Fällen das gleiche? Begründe deine Antwort.

B **7.97** Für eine Zahl $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ gilt $z^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot i$. Wie lautet z? Gib alle Möglichkeiten an.

D **7.98** $\sqrt{a}$ wurde für $a \in \mathbb{R}^-$ als $\pm\sqrt{|a|} \cdot i$ definiert (siehe Seite 187). Zeige, dass das Anwenden der allgemeinen Vorschrift für die Berechnung der komplexen Wurzeln auf das gleiche Ergebnis führt.

B **7.99** Gib z in der Form $z = a + bi$ an. Berechne alle weiteren Wurzeln von z.
a) $3 + 2i = \sqrt[5]{z}$ ***b)*** $-80i = \sqrt[6]{z}$ ***c)*** $-25 + 19i = \sqrt[8]{z}$ ***d)*** $96 - 32i = \sqrt[10]{z}$

7.5 Lösen von Gleichungen in $\mathbb{C}$

7.5.1 Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

7.100 Stelle die Funktionen ***1)*** $y = x^2 + 2x - 3$ ***2)*** $y = x^2 + 4x + 4$ ***3)*** $y = x^2 + x + 1$ grafisch dar. Welche Unterschiede bezüglich der Nullstellen gibt es bei diesen drei Funktionen? BC

Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten wurden bereits in Abschnitt 3 behandelt. Dabei wurde als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen oder eine Teilmenge davon vorausgesetzt.
In diesem Fall entsprechen die Lösungen der Gleichung den Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hängt von der Diskriminante D in der Lösungsformel ab:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}}$$

- Ist $D > 0$, hat die Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen.
  Für $D = 0$ ergibt sich eine reelle (Doppel)-Lösung.
  Für $D < 0$ existiert keine reelle Lösung.

$D > 0$

$D = 0$

$D < 0$

Geht man von der Menge $\mathbb{C}$ als Grundmenge aus, so hat $\sqrt{D}$ sowohl für $D > 0$ als auch für $D < 0$ zwei Lösungen. Obwohl es daher nicht nötig wäre, vor der Wurzel „±“ zu schreiben, wird die Formel in der üblichen Weise angegeben.
Für $D < 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \pm i \cdot \sqrt{|D|}$ und es gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \underbrace{\pm i \cdot \sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}}_{\pm b \cdot i} = -\frac{p}{2} \pm i \cdot \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

- Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind dann **konjugiert komplexe Zahlen**.

7.101 Ermittle die Lösungen der Gleichung ***1)*** in $\mathbb{R}$, ***2)*** in $\mathbb{C}$. B

a) $x^2 + 9 = 0$ **b)** $x^2 + 4x + 13 = 0$ **c)** $4x^2 - 12x + 73 = 0$

Lösung:

a) $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-9}$
$L = \{\ \}$

2) $x_{1,2} = \sqrt{-9} = \pm 3i$
$L = \{\pm 3i\}$

b) $x^2 + 4x + 13 = 0$

1) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} =$
$= -2 \pm \sqrt{-9}$
$L = \{\ \}$

2) $x_{1,2} = -2 + \sqrt{4 - 13} =$
$= -2 + \sqrt{-9} = -2 \pm 3i$
$x_1 = -2 + 3i,\ x_2 = -2 - 3i$
$L = \{-2 \pm 3i\}$

c) $4x^2 - 12x + 73 = 0$

1) $x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 1\,168}}{8} =$
$= \frac{12 \pm \sqrt{-1\,024}}{8}$
$L = \{\ \}$

2) $x_{1,2} = \frac{12 + \sqrt{144 - 1\,168}}{8} =$
$= \frac{12 + \sqrt{-1\,024}}{8} = \frac{12 \pm 32i}{8}$
$x_1 = 1{,}5 + 4i,\ x_2 = 1{,}5 - 4i$
$L = \{1{,}5 \pm 4i\}$

Aufgaben 7.102 – 7.104: Berechne die Lösungen der Gleichung in $\mathbb{C}$.

7.102 **a)** $x^2 = -2$ **b)** $16 + 9x^2 = 0$ **c)** $\frac{x^2}{3} + 2 = 1$ B

7.103 **a)** $x^2 - 10x + 74 = 0$ **c)** $x^2 - 4x + 5 = 0$ **e)** $x^2 + 4x + 7 = 0$ B
b) $4x^2 - 20x + 29 = 0$ **d)** $10x^2 + 80x + 1\,796 = 0$ **f)** $5x^2 - 14x + 202 = 0$

7.104 **a)** $12 - 5z^2 - 4 \cdot (3 - z)^2 = (3z - 1)^2 - (3z - 2) \cdot (3z + 2)$ B
b) $(3z - 1) \cdot (6 + 4z) + (4 + z)^2 = (-5 + 2z)^2 - 68$

B **7.105** Löse mittels Technologieeinsatz die Gleichung $x^2 + 178x + 33\,527 = 0$ **1)** in $\mathbb{R}$, **2)** in $\mathbb{C}$.

TE

Mathcad: www.verlaghpt.at

Lösung mit TI-Nspire:

1) $G = \mathbb{R}$

```
1.1   *Nicht gespeicherte
solve(x^2+178·x+33527=0,x)        false
```

$L = \{\ \}$

2) $G = \mathbb{C}$

```
cSolve(x^2+178·x+33527=0,x)
      x=-89-√25606·i or x=-89+√25606·i
cSolve(x^2+178·x+33527=0,x)
      x=-89.+160.019·i or x=-89.-160.019·i
```

$L = \{-89 \pm 160{,}019i\}$

- Bei der Lösung einer Gleichung mit **solve** werden ausschließlich reelle Lösungen angezeigt, auch wenn als Ausgabeformat **Kartesisch** oder **Polar** gewählt wurde.
- Die komplexen Lösungen erhält man mit dem Befehl **cSolve**. Der Befehl kann über die Tastatur eingegeben werden oder dem Menü **3: Algebra**, **C: Komplex**, **1: Löse** entnommen werden. Die Lösung wird den gewählten Einstellungen entsprechend ausgegeben.

B **7.106** Löse die Gleichung mithilfe von Technologieeinsatz **1)** in $\mathbb{R}$, **2)** in $\mathbb{C}$.

TE

a) $x^2 - 0{,}04x + 1{,}25 = 0$ **b)** $x^2 + 2 \cdot 10^{-3}x + 1{,}1 \cdot 10^{-2} = 0$

B **7.107** Zerlege den Ausdruck in Linearfaktoren.

a) $z^2 + 5z + 10$ **b)** $z^2 - 20z + 101$ **c)** $4z^2 + 10z + 29$

D **7.108** Beweise, dass der Satz von Vieta auch gilt, wenn die Lösungen einer quadratischen Gleichung konjugiert komplexe Zahlen sind.

CD **7.109** Beschreibe, in welchem Fall ein Term der Form $\frac{x^2 + p_1x + q_1}{x^2 + p_2x + q_2}$ gekürzt werden kann. Ist es möglich, dass ein Bruch, der für $G = \mathbb{R}$ nicht kürzbar ist, für $G = \mathbb{C}$ gekürzt werden kann? Begründe deine Antwort.

CD **7.110** Welche der folgenden Aussagen über eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$, $G = \mathbb{C}$, sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antworten.

1) Der Imaginärteil der Lösung kann 0 sein.

2) Die Lösungen sind rein imaginär, wenn $p = 0$ und $q > 0$ ist.

3) Es ist möglich, dass eine Lösung der Gleichung reell und die andere komplex ist.

4) Die Lösungen können komplexe Zahlen mit unterschiedlichen Imaginärteilen sein.

5) Der Realteil der Lösung ist immer $-\frac{p}{2}$.

BC **7.111** **1)** Ermittle die komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 + 6x + 13 = 0$ mittels quadratischer Ergänzung.

2) Gib die Scheitelpunktform der Parabel $y(x) = x^2 + 6x + 13$ an und stelle die Parabel grafisch dar. Beschreibe, welche Zusammenhänge zwischen der Lage der Parabel und den Lösungen der Gleichung bestehen.

AB **7.112** **1)** Ermittle die Lösung der folgenden Textaufgabe:
Das Produkt zweier Zahlen ist 34, ihre Summe beträgt 10. Wie lauten die beiden Zahlen?

2) Erfinde drei ähnliche Aufgaben so, dass deren Lösungen den drei möglichen Lösungsfällen von quadratischen Gleichungen entsprechen.

7.5.2 Gleichungen höheren Grads, Fundamentalsatz der Algebra

Die klassische Algebra beschäftigt sich mit dem Lösen von Gleichungen. Wir haben bereits gezeigt, dass quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$ immer genau zwei Lösungen haben, wenn Doppellösungen als zwei Lösungen gezählt werden. Weiters kann eine Gleichung mit den Lösungen z_1 und z_2 als Produkt $(z - z_1) \cdot (z - z_2) = 0$ angeschrieben werden. Analoge Überlegungen lassen sich auch für Gleichungen höheren Grads durchführen. Da viele dieser Überlegungen auch für das Arbeiten in $\mathbb{R}$ von Bedeutung sind, wird im Folgenden die Gleichungsvariable oft mit x bezeichnet, auch wenn komplexe Lösungen möglich sind.

Polynomfunktionen 3. Grads müssen mindestens eine reelle Nullstelle aufweisen (vergleiche Abschnitt 2), die entsprechenden Gleichungen haben daher mindestens eine reelle Lösung x_1 und enthalten den Linearfaktor $(x - x_1)$. Wird durch diesen Faktor dividiert, ist die verbleibende Gleichung eine quadratische Gleichung, die 2 Lösungen haben muss.

ZB: Die grafische Lösung der Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ zeigt eine Nullstelle $x_1 = 2$ (siehe Abbildung). Der Term $x^3 - 2x^2 + x - 2$ muss sich daher in der Form $(x - 2) \cdot (x^2 + px + q)$ anschreiben lassen.

Mittels Polynomdivision erhält man:
$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 1)$

Die weiteren Lösungen der gegebenen Gleichung erhält man dann durch Nullsetzen des verbleibenden Faktors:
$x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = +i,\, x_3 = -i$

An obigem Beispiel erkennt man:

- Kennt man von einer Polynomgleichung eine Lösung x_1, so kann durch den Faktor $(x - x_1)$ dividiert werden. Dadurch reduziert sich der Grad der Polynomgleichung um 1.
- Ergibt sich bei der Zerlegung ein Faktor, der ein quadratischer Ausdruck ist und nicht auf reelle Lösungen führt („irreduzibler quadratischer Faktor"), so hat die entsprechende Gleichung konjugiert komplexe Lösungen. Mit $z = a + bi$ muss auch $z^* = a - bi$ Lösung sein.
- Sind die Lösungen von $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ ganzzahlig, so müssen die reellen Lösungen x_i Teiler von a_0 sein.

Sind $z_1, \dots, z_n$ die Lösungen der Gleichung $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$ mit $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, so gilt: $(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \dots \cdot (z - z_n) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$

Ist $z = a + bi$ eine Lösung einer Polynomgleichung $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ mit reellen Koeffizienten, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $z^* = a - bi$ eine Lösung der Gleichung.

Carl Friedrich Gauß gelang im Zuge seiner Dissertation erstmals der Beweis, dass jede algebraische Gleichung n-ten Grads n Lösungen hat. Diese Aussage wird wegen ihrer großen Bedeutung als **Fundamentalsatz der Algebra** bezeichnet.

Fundamentalsatz der Algebra (Nullstellensatz für Polynome):
Die Gleichung $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ hat mindestens eine komplexe Lösung (Nullstelle). Sie besitzt genau n komplexe Lösungen (Nullstellen), wenn man die Vielfachheit der Lösungen (Nullstellen) mitzählt.

Komplexe Zahlen

Eine Gleichung ungeraden Grads wie zum Beispiel die Gleichung 3. Grads $3x^3 + x - 2 = 0$ hat immer mindestens eine reelle Lösung. Eine Gleichung geraden Grads wie zum Beispiel die Gleichung 4. Grads $x^4 - 6x^2 + 10 = 0$ muss keine reelle Lösung haben. Die Lösungen einer Gleichung 3. bzw. 4. Grads können mit geeigneten Formeln ermittelt werden. Gleichungen 5. Grads oder höher können im Allgemeinen nur mehr mithilfe von Näherungsverfahren gelöst werden (siehe Band 3).

AD **7.113** Gib je ein Beispiel für eine Gleichung 3. Grads mit einer bzw. drei reellen Lösungen an. Begründe, warum es keine Gleichung 3. Grads mit genau 2 reellen Lösungen (mit Vielfachheit gezählt) geben kann.

B **7.114** Von der Gleichung $x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = 0$ ist bekannt, dass ihre reellen Lösungen ganzzahlig sind. Finde durch Probieren eine dieser Lösungen heraus und dividiere durch den entsprechenden Linearfaktor. Setze mit der entstehenden Gleichung ebenso fort und ermittle so alle Lösungen der Gleichung ohne Technologieeinsatz.

BD **7.115** Zeige, dass die gegebene Zahl eine Lösung der Gleichung ist. Berechne alle Lösungen.
a) $z^3 - 6z^2 - 5z + 39 = 0$ mit $z_1 = 3 + 2i$ **b)** $z^3 - 10z^2 + 36z - 40 = 0$ mit $z_1 = 4 - 2i$

B **7.116** Berechne alle Lösungen der Gleichung $2z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 1 = 0$ mit $z_1 = i, z_2 = -1$.

D **7.117** Beweise: Wenn z eine komplexe Lösung der Gleichung $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist, dann ist auch die konjugiert komplexe Zahl z* eine Lösung dieser Gleichung.

7.5.3 Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Lineare Gleichungen (Gleichungssysteme) mit komplexen Koeffizienten können wie Gleichungen (Gleichungssysteme) mit reellen Koeffizienten behandelt werden.

Quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten können mit den bekannten Formeln für quadratische Gleichungen gelöst werden. Die Lösungen sind zwei komplexe Zahlen.

B **7.118** Löse die Gleichung $x^2 + 8x + ix + 29i - 3 = 0$.

Lösung:

$x^2 + (8 + i) \cdot x + (-3 + 29i) = 0$ • $p = 8 + i, q = -3 + 29i$

$x_{1,2} = -\frac{8+i}{2} \pm \sqrt{\frac{(8+i)^2}{4} - (-3 + 29i)}$

$x_{1,2} = -4 - 0{,}5i \pm \sqrt{18{,}75 - 25i}$ $D = 18{,}75 - 25i = (31{,}25; 306{,}869...°)$

$x_{1,2} = -4 - 0{,}5i \pm \sqrt{(31{,}25; 306{,}869...°)}$ $\sqrt{D}$:

$x_{1,2} = -4 - 0{,}5i \pm (-5 + 2{,}5i)$ $(5{,}590...; 153{,}434...°) = -5 + 2{,}5i$

$x_1 = 1 - 3i$ $x_2 = -9 + 2i$ $(5{,}590...; 333{,}434...°) = 5 - 2{,}5i$

Aufgaben 7.119 – 7.122: Löse die Gleichungen bzw. die Gleichungssysteme in $\mathbb{C}$.

B **7.119** **a)** $x^2 + 2ix + 35 = 0$ **b)** $x^2 + 20ix + 96 = 0$ **c)** $5x^2 + 28ix - 15 = 0$

B **7.120** **a)** $x^2 - (18 - 5i)x - 90i = 0$ **b)** $x^2 - (9 + 4i)x - 36i = 0$

B **7.121** **a)** $x^2 + 5x + 3ix - 6 + 4i = 0$ **b)** $x^2 - x + 9ix + 10 - 3i = 0$

B **7.122** **a)** I: $(15 + 4i) \cdot x + (-8 - 9i) \cdot y = 1 - 29i$
II: $(-9 + 5i) \cdot x - (18 - 13i) \cdot y = 112 + 222i$
b) I: $(-7 + 6i) \cdot x + (3 - 5i) \cdot y = -108 - 75i$
II: $(2 - 4i) \cdot x - (-9 + 6i) \cdot y = -96 - 156i$

Zusammenfassung

Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$ bzw. $j^2 = -1$

Imaginäre Zahlen: $z = b \cdot i$ bzw. $z = b \cdot j$ mit $b \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen: $z = a + bi = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ bzw. $z = a + bj;\ a, b \in \mathbb{R}$
Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C}$

Darstellungsformen: $z = a + bi = (r; \varphi) = r \underline{/\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

Grafische Darstellung: als Zeiger in der **Gauß'schen Zahlenebene**

Umrechnungen:

$z = a + bi \quad \rightarrow$
Betrag: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$
Winkel $\varphi = \arg(z)$: $\tan(\varphi) = \frac{b}{a},\ a \neq 0$

$z = (r; \varphi) \quad \rightarrow$
Realteil: $a = r \cdot \cos(\varphi)$
Imaginärteil: $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Euler'sche Formel: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ bzw. $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

Konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + bi$: $z^* = a - bi$

Addition und **Subtraktion:** Es werden jeweils die Realteile und Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert. Für $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ gilt:
$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ bzw. $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
Grafisch werden komplexe Zahlen wie Vektoren addiert bzw. subtrahiert.

Multiplikation: Die Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ werden wie Binome miteinander multipliziert. Für $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$

Bei der **Division** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$ wird der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners $z_2^* = c - di$ erweitert.
Für $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:
$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$

Berechnungen von **Potenzen** komplexer Zahlen:
$z^n = [r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))]^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$
$z^n = (r; \varphi)^n = (r^n; n \cdot \varphi)$
Satz von de Moivre: $(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

n-te Wurzeln (Lösungen) der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$:
$z_1 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right) \quad z_2 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{1 \cdot 360°}{n}\right) \quad z_3 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n}\right) \ldots \quad z_n = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}\right)$

Lösungen von **quadratischen Gleichungen** in $\mathbb{C}$:
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; konjugiert komplexe Lösungen für $D < 0$

Weitere Aufgaben

B **7.123** Stelle z grafisch dar und gib die Zahl in allen besprochenen Darstellungsformen an.
a) $z = -4i$ **b)** $z = (4; 320°)$ **c)** $z = 14 \cdot (\cos(29°) + i \cdot \sin(29°))$ **d)** $z = 0{,}81 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$

B **7.124** Berechne den Term für $z_1 = 4 - 2i$; $z_2 = -1 + 5i$ und kontrolliere durch eine Zeichnung.
a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$ **c)** $z_1 + z_2^*$ **d)** $z_2^* - z_1^*$

B **7.125** Berechne und gib das Ergebnis in der Form $z = a + bi$ und $z = r\,\underline{/\varphi}$ an. Arbeite ohne Technologieeinsatz, mit $z_1 = 7 - 2i$; $z_2 = 3\,\underline{/40°}$; $z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$.
a) $z_1 + z_2 - z_3$ **b)** $z_1 \cdot z_2 + z_3$ **c)** $\frac{(z_2 + z_3)}{z_1}$

BC **7.126** Berechne $z = \frac{7 + 26i}{-4 + 3i}$ ohne Technologieeinsatz und dokumentiere deinen Rechenweg.

B **7.127** Berechne die gesuchte Potenz ohne Technologieeinsatz und gib Re(z) und Im(z) an.
a) $z = i^{17}$ **b)** $z = 1^{-i}$ **c)** $z = (2\,\underline{/18°})^5$ **d)** $z = (3 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}})^{-3}$ **e)** $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-4}$

B **7.128** Ermittle die Lösungen der Gleichung in $\mathbb{C}$.
a) $x^2 - 22x + 185 = 0$ **c)** $x^2 - 4x + 20 = 0$ **e)** $144x^2 - 384x + 337 = 0$
b) $x^2 + 4x + 85 = 0$ **d)** $9x^2 + 6x + 50 = 0$ **f)** $2x^2 - 2x + 1 = 0$

AB **7.129** Stelle alle Wurzeln in der Form $z = a + bi$ dar.
a) $z = \sqrt[7]{-2\,187}$ **b)** $z = \sqrt[3]{(421{,}875; 75{,}6°)}$ **c)** $z = \sqrt[4]{74 + 99i}$

ABC **7.130** Kennzeichne den angegebenen Bereich in der Gauß'schen Zahlenebene.
a) $\text{Re}(z) = |\text{Im}(z)|$ **b)** $|z| \leqslant 4$ **c)** $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ **d)** $z \cdot z^* = 25$

B **7.131** Löse die Gleichung und stelle die Lösungen grafisch dar.
a) $x^2 - (4 + 4i) \cdot x + 21 + 12i = 0$ **b)** $2x^2 + (17 - 33i) \cdot x = -84 + 72$

AB **7.132** Zeige: Für eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ mit den komplexen Lösungen $x_{1,2} = a \pm bi$ gilt: $p = -2a$ und $q = a^2 + b^2$

B **7.133** Die Gleichung $x^2 - 2x + q = 0$ mit $q \in \mathbb{R}$ hat die Lösung $x_1 = 1 + i$. Ermittle x_2 und q.

D **7.134** Die gegebene Gleichung hat mindestens eine ganzzahlige Lösung. Ermittle alle Lösungen für $G = \mathbb{C}$ ohne Technologieeinsatz.
a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ **b)** $x^5 + 3x^4 + x + 3 = 0$

D **7.135** Zeige: **a)** $z \cdot z^* = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$ **b)** $\arg\left(\frac{z}{z^*}\right) = 2 \cdot \arg(z)$

D **7.136** Es sind 1, z und z^2 die drei Einheitswurzeln von 1.
Beweise folgende Aussage.
a) $(1 + z^2)^3 = -1$ **b)** $(1 - z)^2 \cdot (1 + z) = 3$ **c)** $i \cdot (z - z^2)$ ist eine reelle Zahl.

D **7.137** Beweise für $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$, dass $z_1 \cdot z_2^* + z_1^* \cdot z_2$ eine reelle Zahl ist.

D **7.138** Beweise $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Hinweis: Verwende den ersten Summensatz.

BD **7.139** $z_1 = \sqrt[3]{(r; \varphi)}$ ist eine Wurzel der Zahl $(r; \varphi)$. Zeige, dass die weiteren Wurzeln gleich $z_2 = w \cdot z_1$ und $z_3 = w^2 \cdot z_1$ sind, wobei $w = -0{,}5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot i$ ist.

B **7.140** Stelle alle Lösungen der Gleichung $z^5 = -1\,024$ grafisch dar und zeige mittels Technologieeinsatz, dass sie ein regelmäßiges Fünfeck bilden.

TE

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann die Begriffe *imaginäre Einheit* und *komplexe Zahl* erklären.	
2	Ich kann die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 3i$ und $z_2 = 4\,\underline{/\,30°}$ in der Gauß'schen Zahlenebene einzeichnen.	
3	Ermittle die angegebene Potenz von i. A) i^{35} B) i^{4n+2}	
4	Ich kann erklären, wie man eine komplexe Zahl von Komponentenform in Polarform umwandelt und umgekehrt.	
5	Ermittle für $z_1 = 4 + 3j$ und $z_2 = -2 + 5j$ rechnerisch und grafisch. A) $z_1 + z_2$ B) $z_1 - z_2$	
6	Um einen komplexen Zeiger um $\frac{\pi}{4}$ zu drehen und auf die doppelte Länge zu strecken, muss man ihn mit z = ______ multiplizieren.	
7	Begründe, ob die Aussage wahr oder falsch ist: Für jede komplexe Zahl $z = a + bi$ gilt: $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	
8	Wie lautet die konjugiert komplexe Zahl z* zu $z = 4 - 5j$ und welche Eigenschaften hat z*?	
9	Dividiere die komplexen Zahlen in Komponentenform: $z = \frac{-13 + i}{2i - 1}$	
10	Ermittle Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl: $z = (2\,\underline{/\,45°})^2$ Re(z) = ______ Im(z) = ______	
11	Gib alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16$ in Komponentenform an.	
12	Begründe, ob die Aussage richtig oder falsch ist: Sind w und z zwei verschiedene Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten, dann muss $\text{Re}(w) = \text{Re}(z)$ gelten.	
13	Ich kann die Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra mit eigenen Worten wiedergeben.	

Lösung:
1) siehe Seiten 186 und 188 2) siehe Seite 189 3) A) −i, B) −1 4) siehe Seiten 191f
5) A) 2 + 8j, B) 6 − 2j 6) $z = 2\,\underline{/\,\frac{\pi}{4}}$ 7) falsch (siehe Seite 191) 8) z* = 4 + 5j; siehe Seite 199
9) z = 3 + 5i 10) Re(z) = 0; Im(z) = 4 11) 2; −2; 2i; −2i
12) falsch; gilt nur für konjugiert komplexe Lösungen, nicht bei reellen Lösungen 13) siehe Seite 209

8 Vektoren

Viele Computeranwendungen stellen Handlungen im dreidimensionalen Raum auf einem zweidimensionalen Bildschirm dar. Zur Beschreibung der Bewegungen werden Vektoren verwendet. Vektoren in der Ebene, deren Definition und Darstellung sowie einige Rechenoperationen wurden bereits in Band 1 behandelt. In diesem Abschnitt soll dieses Wissen vertieft und auf Vektoren im Raum erweitert werden.

8.1 Wiederholung der Grundbegriffe

Unter einem **Vektor** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ versteht man die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeile. Ein einzelner Pfeil wird **Repräsentant** genannt. Repräsentanten mit dem Ursprung als Anfangspunkt bezeichnet man als **Ortsvektoren**, zB $\overrightarrow{OA}$.

Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB} = B - A$ („Endpunkt minus Anfangspunkt")

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Einheistvektor:

$$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einer reellen Zahl

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt der Strecke AB:

$$M_{AB} = \tfrac{1}{2} \cdot (A + B)$$

Schwerpunkt des Dreiecks ABC:

$$S = \tfrac{1}{3} \cdot (A + B + C)$$

AB **8.1** Für die Erstellung eines Wandbilds wurde das Sternzeichen „Großer Wagen" in ein Koordinatensystem eingetragen.

1) Gib die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CA}$ an.

2) Der Streckenzug GFEA stellt die Deichsel des Wagens dar. Gib die Vektoren, die die Teilstücke beschreiben, an und berechne deren Länge und die Gesamtlänge.

3) Die Figur soll so verschoben werden, dass der Punkt D im Koordinatenursprung liegt. Gib den Vektor an, um den die Punkte jeweils verschoben werden müssen und ermittle die neuen Koordinaten aller Punkte.

BD **8.2** Die Eckpunkte eines Vierecks sind gegeben. Ermittle die Mittelpunkte der Seiten und zeige, dass sie die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Überprüfe deine Ergebnisse durch eine Zeichnung.

a) A(−3,5|2), B(4|−4), C(7|1), D(−4|7) ***b)*** A(10|11), B(4|−1), C(10|5), D(−2|3)

B **8.3** Arbeite mit dem gegebenen Dreieck ABC.

1) Ermittle den Schwerpunkt und prüfe nach, dass gilt: $2 \cdot \overrightarrow{M_{AB}S} = \overrightarrow{SC}$

2) Berechne einen Vektor in Richtung der Winkelsymmetrale w_α.

a) A(4|1), B(−3|3), C(1|−7) ***b)*** A(−5|−3), B(2|7), C(−5|4)

8.2 Normalvektoren

8.4 Stelle den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ grafisch dar. Zeichne einen Vektor mit der gleichen Länge ein, der auf $\vec{a}$ im rechten Winkel steht, und lies seine Koordinaten ab. Beschreibe den Zusammenhang mit dem Vektor $\vec{a}$ mit eigenen Worten. BC

Zwei Vektoren, die normal aufeinander stehen, werden auch **orthogonal** genannt. Die Begriffe „orthogonal“ bzw. „Orthogonalität“ setzen sich aus den altgriechischen Wörtern für „gerade, recht, richtig“ (orthos) und „Winkel, Ecke“ (gonia) zusammen.

Dreht man den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ um 90° in die mathematisch positive Richtung, also gegen den Uhrzeigersinn (nach links), so erhält man den Vektor $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Dreht man $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ um 90° in die mathematisch negative Richtung, also im Uhrzeigersinn (nach rechts), so entsteht der Vektor $\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Normalvektoren

$\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ... der durch Linksdrehung entstandene Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$ ... der durch Rechtsdrehung entstandene Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$

8.5 Ist der gegebene Normalvektor durch eine Rechts- oder durch eine Linksdrehung entstanden? Begründe deine Antwort. CD

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n_b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

8.6 Gib die Koordinaten beider Normalvektoren des Vektors $\overrightarrow{AB}$ an. B
a) A(6|−1), B(11|−13) **b)** A(3|−1), B(3|4) **c)** A(−4|−10), B(2|−4) **d)** A(7|8), B(4|8)

Aufgaben 8.7 – 8.9: Berechne jeweils die fehlenden Koordinaten der weiteren Eckpunkte und überprüfe deine Rechnung durch eine Zeichnung.

8.7 Die Strecke BC mit B(−3|−3) und C(4|−2) ist eine Kathete eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks (zwei Lösungen). AB

8.8 Die Strecke AB mit A(3|4) und B(7|6) ist die Seitenkante eines Quadrats (zwei Lösungen). AB

8.9 Die Strecke AC mit A(−6|5) und C(3|−7) ist die Diagonale e einer Raute. AB
a) Die Diagonale f ist doppelt so lang wie die Diagonale e.
b) Die Länge der Diagonale f ist ein Drittel der Länge der Diagonale e.

8.10 In welchem besonderen Dreieck ist der Normalvektor einer Seite jeweils ein Vektor in Richtung einer Schwerlinie? Begründe deine Antwort. ACD

8.3 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Definition des Skalarprodukts

D **8.11** Zwei Leiterwagerln mit der gleichen Masse werden entlang einer geraden Strecke gezogen. Welcher Bewegungsablauf benötigt weniger Muskelkraft? Begründe deine Entscheidung.

Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht wissen wir, dass die Arbeit W gleich dem Produkt aus den Beträgen der vektoriellen Größen **Kraft in Wegrichtung $\vec{F}_s$** und **Weg $\vec{s}$** ist: $W = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}|$

Dabei ist $\vec{F}_s$ die Normalprojektion des Vektors $\vec{F}$ auf die Richtung $\vec{s}$.
Es gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{AK}{HYP} = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi)$$

$\vec{F}$ und $\vec{s}$ sind gerichtete Größen, die Arbeit W ist keine gerichtete Größe, sondern ein sogenannter **Skalar**. Sie kann als das Produkt der Beträge der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ multipliziert mit dem Cosinus des von den beiden Vektoren eingeschlossenen Winkels φ berechnet werden. Diese Multiplikation bezeichnet man als **skalare Multiplikation** der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$, das Ergebnis heißt **Skalarprodukt**.
Man schreibt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Allgemein gilt für das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b'}|$$

mit $|\vec{b'}|$ ... Länge der Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Geometrisch kann das Skalarprodukt als Größe des Flächeninhalts des Rechtecks mit den Seitenlängen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b'}|$ interpretiert werden.

Projiziert man umgekehrt den Vektor $\vec{a}$ auf $\vec{b}$, so erhält man $|\vec{a'}| = |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$ und es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Aus der geometrischen Interpretation ergibt sich für $\vec{b} = \vec{a}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Stehen die beiden Vektoren aufeinander normal, dann ist die Länge der Projektion $|\vec{b'}| = 0$. Damit ist auch der Flächeninhalt und daher auch das Skalarprodukt null.

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren null, so bezeichnet man sie als **orthogonal**. Sind in diesem Fall beide Vektoren vom Nullvektor verschieden, so schließen sie einen rechten Winkel ein. Der Nullvektor ist zu jedem Vektor orthogonal. Sind $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$, so gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Weiters gilt für das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{und} \quad s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (s \cdot \vec{b})$$

Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b'}|$$

Stehen Vektoren aufeinander normal, ist ihr Skalarprodukt null.

Berechnung des Skalarprodukts in Koordinatenschreibweise

Man kann eine Formel zur Berechnung des Skalarprodukts mithilfe der **Basisvektoren** entwickeln. Das sind jene Vektoren, die in Richtung der Koordinatenachsen verlaufen und 1 Einheit lang sind:

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ kann mithilfe dieser beiden Vektoren dargestellt werden.

ZB: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\vec{a}$ wird damit als **Linearkombination** der Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ angegeben. Allgemein bezeichnet man jeden Ausdruck der Form $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$, mit $r, s \in \mathbb{R}$ als Linearkombination.

Unter Anwendung der Eigenschaften des Skalarprodukts gilt nun:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \left(a_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(b_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= a_x \cdot b_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=1} + a_y \cdot b_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} + a_x \cdot b_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0} + a_y \cdot b_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=1} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

ZB: $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 7 + (-5) \cdot 4 = 21 - 20 = 1$

Berechnung des **Skalarprodukts** in Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

8.12 Beschreibe anhand der gegebenen Vektoren zwei verschiedene Methoden um nachzuprüfen, ob die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal aufeinander stehen. BC

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 35 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

Lösung:
1. Methode:
Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$ stehen normal aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt null ist.

$\begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = 12{,}5 \cdot 7 + 35 \cdot (-2{,}5) = 87{,}5 - 87{,}5 = 0$

2. Methode:
Zwei Vektoren stehen normal aufeinander, wenn der eine ein Normalvektor des anderen oder ein Vielfaches davon ist.

$\begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 35 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a_R} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a_R} \parallel \vec{b}$

Die beiden Vektoren stehen aufeinander normal.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Da das Skalarprodukt auf zwei Arten berechnet werden kann, ist es möglich, eine Formel für den Winkel φ zwischen zwei Vektoren anzugeben.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

- Definition des Skalarprodukts

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

- Mithilfe des Skalarprodukts in Koordinatenschreibweise kann nun der Winkel φ berechnet werden.

Für den **Winkel** φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

B **8.13** Berechne den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right|} = \frac{7 \cdot 2 - 1 \cdot 9}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{85}} = \frac{5}{\sqrt{4\,250}} = 0{,}076...$$

$\varphi = \arccos(0{,}076...) = 85{,}601...° \Rightarrow \varphi \approx 85{,}60°$

Flächeninhalt von Parallelogrammen und von Dreiecken

Zwei Vektoren spannen ein Parallelogramm auf. Sein Flächeninhalt kann mithilfe des Skalarprodukts berechnet werden.

$A_P = a \cdot h_a = |\vec{a}| \cdot h_a$ mit $h_a^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{b'}|^2 \Rightarrow$

$A_P = |\vec{a}| \cdot \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b'}|^2}$

$A_P = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b'}|^2} = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b'}|)^2}$

- $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$

$A_P = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

- $|\vec{a}| \cdot |\vec{b'}| = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$A_P = |a_x b_y - a_y b_x|$

- siehe Aufgabe 8.38

Der Flächeninhalt A_D eines Dreiecks kann mithilfe von $A_D = \frac{1}{2} \cdot A_P$ berechnet werden.

Flächeninhalt eines **Parallelogramms**:

$$A_P = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_x b_y - a_y b_x|$$

Flächeninhalt eines **Dreiecks**:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot A_P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \cdot |a_x b_y - a_y b_x|$$

B

8.14 Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms A(1|–2), B(5|1), C(–1|2) und $D(x_D|y_D)$.

Lösung:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 25$ $\quad \vec{b}^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = 37$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = -21$

$A_P = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

$A_p = \sqrt{25 \cdot 37 - (-21)^2} = \sqrt{484} = 22$

Der Flächeninhalt beträgt 22 E^2.

Technologieeinsatz: Skalares Produkt

TE

GeoGebra: www.verlaghpt.at

TI-Nspire

$a:=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$b:=[4 \ 5]$	$[4 \ 5]$
$c:=[6 \ 2]$	$[6 \ 2]$
dotP(b,c)	34
dotP([4;5],[6;2])	

- Vektoren werden mithilfe von eckigen Klammern **[ ]** oder über „mathematische Vorlagen" eingegeben.
Es können Spaltenvektoren (Trennzeichen bei der Eingabe **;**) oder Zeilenvektoren (Trennzeichen **,**) verwendet werden.
- Das Skalarprodukt wird mit dem Befehl **dotP(** berechnet, der direkt eingegeben oder über das Menü **7: Matrix und Vektor**, **C: Vektor**, **3: Skalarprodukt** ausgewählt werden kann.

Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren

B

8.15 Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

B TE

8.16 Überprüfe die Richtigkeit der Aussagen anhand der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 23 \\ -17 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -48 \\ 55 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -35 \\ -28 \end{pmatrix}$

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ***2)*** $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

B

8.17 Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

a) A(–2|–9), B(–7|3), C(–4|7) ***b)*** A(5|–3), B(9|8), C(17|3)

B

8.18 Ermittle auf zwei Arten, ob die beiden Vektoren normal aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 35 \\ 65 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -39 \\ -15 \end{pmatrix}$

B

8.19 Schreibe den Vektor $\overrightarrow{AB}$

1) als Summe aus einem senkrechten und einem waagrechten Vektor an.

2) als Linearkombination der Einheitsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ an.

a) A(3|11), B(–8|9) ***b)*** A(–34|0), B(25|37) ***c)*** $A(x_A|0)$, $B(1|y_B)$

B **8.20** **a)** Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 5x \end{pmatrix}$ beträgt (−24).
Wie lauten die beiden Vektoren?

b) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen normal aufeinander. Ermittle a_x.

B **8.21** Berechne die Größen der Innenwinkel des Vierecks mit den angegebenen Eckpunkten.
a) G(−4|2), H(−6|−4), I(4|−6), J(7|5) **b)** K(0|−3), L(3|5), M(−9|1), N(−6|−4)

BD **8.22** Der Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben. Berechne die fehlende Koordinate. Wie viele Lösungen sind möglich? Begründe deine Antwort mithilfe einer Zeichnung.
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ b_y \end{pmatrix}$, $\varphi = 60°$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\varphi = 30{,}51°$

AD **8.23** Setze die Worte „positiv“ oder „negativ“ richtig ein und begründe deine Antwort.
„Schließen zwei Vektoren einen spitzen Winkel ein, so ist ihr Skalarprodukt ..., schließen sie einen stumpfen Winkel ein, so ist es ... .“

ACD **8.24** Welchen Winkel schließen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein, wenn folgende Aussage gilt? Begründe deine Antwort mithilfe einer Skizze.
1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ **2)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ **3)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

ACD **8.25** Der Vektor $\vec{b}$ aus nebenstehender Skizze kann um einen beliebigen Winkel gedreht werden, während $\vec{a}$ fest bleibt. Beschreibe, wie sich dabei das Skalarprodukt der beiden Vektoren ändert. Welchen Wert nimmt es höchstens an, welchen mindestens?

AB **8.26** Pflüge können von Traktoren, aber auch von Ochsen, Büffeln oder Pferden gezogen werden. Berechne die Arbeit, die benötigt wird, um einen Pflug einen Weg s weit zu ziehen, wenn mit folgender Kraft in Wegrichtung gezogen wird.
a) F_s = 3 500 N, s = 435 m **b)** F_s = 7 500 N, s = 1 050 m **c)** F_s = 40 000 N, s = 750 m

AB **8.27** Ein Schlitten wird an einem Seil mit einer konstanten Kraft $\vec{F}$ gezogen, das mit dem waagrechten Untergrund einen Winkel φ einschließt. Es wird eine Strecke s zurückgelegt. Berechne die dabei verrichtete Arbeit.
a) s = 1,8 km; $F = |\vec{F}|$ = 45 N; φ = 37° **b)** s = 2,3 km; $F = |\vec{F}|$ = 55 N; φ = 32°

D **8.28** Eine Last wird entlang eines Weg s mit einer konstanten Kraft $\vec{F}$ gezogen, die mit dem waagrechten Untergrund einen Winkel φ einschließt. Begründe mithilfe des skalaren Produkts, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. welche falsch sind.
1) Wird der Weg verdoppelt, so verdoppelt sich die verrichtete Arbeit.
2) Wird der Winkel φ verdoppelt, so wird doppelt so viel Arbeit verrichtet.
3) Die verrichtete Arbeit ist proportional zur Kraft.

AB **8.29** Ein Körper wird auf einer Strecke s mit der Steigung k mit einer Kraft $\vec{F}$ in Richtung $\vec{r}$ gezogen. Berechne die dabei verrichtete Arbeit ($F = |\vec{F}|$).
a) s = 650 m; k = 10 %; F = 65 N; $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ **b)** s = 80 m; k = 5 %; F = 2 870 N; $\vec{r} = \begin{pmatrix} 40 \\ 9 \end{pmatrix}$

8.30 Welchen Winkel schließen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein, die folgende Bedingungen erfüllen?
$|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$; $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

AD

8.31 Zeige, dass die folgenden Eigenschaften des Skalarprodukts gelten. Begründe jeweils, ohne die Koordinatenschreibweise zu verwenden.
1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ***2)*** $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ***3)*** $s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$

D

8.32 Begründe, warum das Skalarprodukt für mehr als zwei Vektoren nicht definiert ist.

D

8.33 Beweise mithilfe des Skalarprodukts
a) den Satz von Pythagoras.
b) den Satz von Thales.
c) den Cosinussatz.

D

8.34 Gegeben ist das Quadrat ABCD. Verbindet man die Seitenmittelpunkte E, F, G und H mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht das rot eingezeichnete Achteck. Zeige mithilfe der Vektorrechnung, dass es sich nicht um ein regelmäßiges Achteck handelt.
Hinweis: Ein n-Eck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind.

ABD

Flächeninhalt von Parallelogrammen und von Dreiecken

8.35 Berechne den Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks auf drei verschiedene Arten.
a) A(7|11), B(−9|1), C(2|−7) ***b)*** A(−4|−3), B(5|0), C(−2|−8)

B

8.36 Ermittle den Flächeninhalt des angegebenen Parallelogramms mithilfe der Vektorrechnung.
a) A(10|5), B(2|3), $C(x_C|y_C)$, D(13|5) ***b)*** $A(x_A|y_A)$, B(−5|−7), C(−2|5), D(−11|9)

B

8.37 Überprüfe mithilfe der Vektorrechnung anhand des gegebenen Dreiecks die Gültigkeit des folgenden Satzes:
Die Verbindungsstrecken des Schwerpunkts mit den Eckpunkten teilen das Dreieck in drei flächengleiche Dreiecke.
a) A(6|5), B(−2|5), C(−1|−2) ***b)*** A(10|0), B(4|−4), C(−5|−2)

B

8.38 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. Zeige, dass gilt: $A_P = |a_x b_y - a_y b_x|$

D

8.39 In jedem beliebigen Viereck ABCD ist das durch die Seitenmittelpunkte M_a, M_b, M_c und M_d festgelegte Viereck ein Parallelogramm.
1) Prüfe die Behauptung anhand einer Zeichnung mithilfe von Technologieeinsatz nach.
2) Zeige mithilfe der Vektorrechnung, dass $\vec{u} = \vec{v}$ ist.
3) Ermittle den Flächeninhalt des entstehenden Parallelogramms für A(1|1), B(5|0), C(4,5|3) und D(2|5).

ABD

Vektoren

8.4 Vektoren im Raum

AB **8.40** In der linken unteren Ecke eines Zimmers, das 4 m lang, 3 m breit und 2,5 m hoch ist, sitzen eine Spinne und eine Fliege. Beide bewegen sich gleichzeitig auf kürzestem Weg zur rechten oberen Ecke auf der gegenüberliegenden Wand, wobei die Spinne nur entlang der Raumkanten krabbeln kann.

1) Skizziere einen möglichen Weg für die Spinne. Wie lang ist dieser Weg?

2) Skizziere einen möglichen Weg für die Fliege. Wie lang ist dieser Weg?

Vektoren im Raum werden mithilfe von drei Koordinaten beschrieben und in einem dreidimensionalen Koordinatensystem veranschaulicht. Sie werden als **dreidimensionale Vektoren** bezeichnet:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (5, 3, 4)$

Die Basisvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ sind zueinander orthogonal.

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bei dreidimensionalen Koordinatensystemen unterscheidet man zwei Fälle:

- Linkssystem (Linkskoordinatensystem, linkshändiges Koordinatensystem)
- Rechtssystem (Rechtskoordinatensystem, rechtshändiges Koordinatensystem)

Linkssystem Rechtssystem

Alle Formeln, die in Band 1 und Band 2 für zweidimensionale Vektoren angegeben wurden, gelten sinngemäß auch für dreidimensionale Vektoren. Einige dieser Formeln und Rechenregeln sind hier angeführt. Der Betrag eines dreidimensionalen Vektors entspricht der Länge einer Raumdiagonalen eines Quaders mit den Seitenlängen a_x, a_y und a_z.

Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

Betrag: $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Einheitsvektor: $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Nullvektor: $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Addition und Subtraktion:

$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_x \\ a_z \pm b_x \end{pmatrix}$

Multiplikation mit einem Skalar:

$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \\ s \cdot a_z \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Skalare Multiplikation: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

8.41 Die Bergstation B einer Seilbahn liegt 927 m höher als die Talstation T. Sie ist 2 365 m in einem Winkel $\alpha = 31°$ in östlicher Richtung entfernt. Gib den Vektor $\vec{b}$ von der Talstation zur Bergstation an und berechne seine Länge. Dokumentiere deine Vorgehensweise anhand einer Skizze, wähle dabei die Talstation im Koordinatenursprung und die y-Achse in Richtung Norden.

ABC

Lösung:

$\overline{TF} = 2\,365 \text{ m}$

$b_x = 2\,365 \text{ m} \cdot \sin(\alpha) = 1\,218{,}0... \approx 1\,218 \text{ m}$

$b_y = 2\,365 \text{ m} \cdot \cos(\alpha) = 2\,027{,}2... \approx 2\,027 \text{ m}$

$b_z = 927 \text{ m}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1\,218 \\ 2\,027 \\ 927 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \\ = \sqrt{1\,218{,}0...^2 + 1\,027{,}2...^2 + 927^2} = 2\,540{,}1...$$

$|\vec{b}| \approx 2\,540 \text{ m}$

8.42 Auf einem Balkon soll ein Sonnensegel montiert werden. Für die Planung wurde eine Skizze mit folgenden Koordinaten erstellt (Maße in Meter): P(0|0|3); R(2,5|0|2); Q(0|2,8|2,5)

AB

1) Ermittle den Winkel $\sphericalangle RPQ$ des Sonnensegels.

2) Die von P nach R führende Strebe soll um 1,2 m bis zum Punkt S verlängert werden. Ermittle dessen Koordinaten.

Lösung:

1) $\vec{a} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}8 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

$$\cos(\sphericalangle RPQ) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2{,}5 \cdot 0 + 0 \cdot 2{,}8 + 1 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2{,}5^2 + 0 + 1} \cdot \sqrt{0 + 2{,}8^2 + 0{,}5^2}} = 0{,}065...$$

$\sphericalangle RPQ = \arccos(0{,}065...) = 86{,}2...° \approx 86°$

2) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + 1{,}2 \cdot \vec{a}_0$ $\qquad$ $\vec{a}_0$ ... Einheitsvektor von $\overrightarrow{PR}$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{7{,}25}} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}928... \\ 0 \\ -0{,}371... \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}93 \\ 0 \\ -0{,}37 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} \approx \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}93 \\ 0 \\ -0{,}37 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}61 \\ 0 \\ 1{,}55 \end{pmatrix}$$

Der Punkt S hat die Koordinaten S(3,61|0|1,55).

CD **8.43** Welche Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antwort.

1) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ **3)** $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AC}$ **5)** $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$

2) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DA}$ **4)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ **6)** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$

B **8.44** Gib den Vektor $\overrightarrow{AB}$ an.

a) A(−8|3|6), B(0|−5|0) **b)** A(15|−4|12), B(−11|3|−9) **c)** A(7|5|−2), B(−6|−8|−5)

B **8.45** Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 27 \\ -5 \\ 45 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 16 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

AB **8.46** Berechne die fehlende Koordinate, sodass die beiden Vektoren orthogonal sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ a_z \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ b_y \\ 5 \end{pmatrix}$

D **8.47** Welchen Winkel schließen Vektoren der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix}$ mit dem Basisvektor $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein?

Begründe deine Antwort rechnerisch und mithilfe einer Skizze.

B **8.48** Stelle die folgenden Vektoren als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{HM}$ und $\overrightarrow{HG}$ dar:

1) $\overrightarrow{AB}$, **2)** $\overrightarrow{AM}$, **3)** $\overrightarrow{BJ}$, **4)** $\overrightarrow{MI}$

B **8.49** Ermittle für die gegebenen Punkte A und B

1) den Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und **2)** den zugehörigen Einheitsvektor.

a) A(1|4|−6), B(3|4|−5) **b)** A(8|10|−9), B(6|17|−3) **c)** A(−8|30|12), B(−7|9|−3)

B **8.50** Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

a) A(−5|2|−1), B(3|−3|3), C(−10|1|7)

b) A(4|0|1), B(12|−5|3), C(−4|11|−7)

B **8.51** Verwende nebenstehende Zeichnung.

1) Gib den Vektor $\overrightarrow{OP}$ an und ermittle dessen Länge.

2) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks OPP′.

B **8.52** Gegeben ist das Parallelogramm ABCD.
Berechne die fehlenden Koordinaten.

a) A(11|3|−10), B(−4|5|−4), C(−1|14|5), D

b) A(2|−7|13), B(12|−5|3), C, D(7|−1|−17)

BC **8.53** Prüfe nach, ob die Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ normal auf $\vec{a}$ stehen und interpretiere das Ergebnis.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

8.54 Über dem Eingang des Louvre wurde eine quadratische Glaspyramide errichtet. Legt man die xy-Ebene in die Grundfläche und den Ursprung O in den Mittelpunkt M, so hat die linke vordere Ecke die Koordinaten A(17,7 m|−17,7 m|0 m).
Die Höhe der Pyramide beträgt 21,7 m. AB

S
D
C
M
A
B

1) Gib die Koordinaten der Punkte B, C, D und S an.
2) Ermittle mithilfe von Vektoren die Oberfläche der Pyramide.
3) Ermittle mithilfe von Vektoren den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

8.55 Berechne die beiden Schnittwinkel zwischen den Diagonalen des Vierecks ABCD. B
a) A(7|−4|−10), B(−7|−6|12), C(−7|8|9), D(1|−1|6)
b) A(9|13|−4), B(−13|8|11), C(14|0|−9), D(−3|4|−3)

8.56 Berechne den Umfang, den Flächeninhalt und den Schwerpunkt des Dreiecks ABC. B
a) A(12|5|−10), B(−4|−14|9), C(8|−11|3) **b)** A(15|0|−17), B(−8|−3|−9), C(−1|17|−4)

8.57 Der Eckpunkt A eines Würfels mit der Kantenlänge s liegt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte, der Mittelpunkte der Seitenflächen und des Mittelpunkts des Würfels. B
a) Die Kanten mit der Länge s = 12 cm liegen auf den positiven Koordinatenachsen.
b) Die Kanten mit der Länge s = 5 cm liegen auf den negativen Koordinatenachsen.

8.58 Der Vektor $\vec{a}$ schließt mit der gegebenen Achse den Winkel φ ein. Berechne die fehlende Koordinate auf zwei Dezimalstellen genau. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ a_y \\ 5 \end{pmatrix}$, φ = 60°, y-Achse **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, φ = 40°, x-Achse **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ a_z \end{pmatrix}$, φ = 75°, z-Achse

8.59 Ein Bücherregal soll an einer Wand montiert werden. Die Koordinaten der Punkte in der abgebildeten Skizze sind in Zentimeter angegeben: AB
E(0|120|180), F(0|320|180), G(40|120|180), I(0|120|255)

z
J
I
F
E
H
G
K
y
0
x

1) Gib die Koordinaten der Punkte J und H an.
2) Ermittle mithilfe von Vektoren die Länge der Strecke GI und den Winkel, den diese mit der Wand einschließt.
3) Ermittle mithilfe von Vektoren die Koordinaten des Punkts K so, dass die Strecke GK normal auf GI steht.

8.60 Für jedes beliebige Viereck im Raum gilt: Die Mittelpunkte der Seiten sind die Eckpunkte eines Parallelogramms. AB TE
1) Prüfe anhand des Vierecks ABCD nach.
2) Ändere eine (oder mehrere) beliebige Koordinate(n) und prüfe erneut nach.
a) A(1|3|−1), B(0|5|−4), C(−1|4|5), D(1|−1|3)
b) A(2|−7|1), B(2|−5|3), C(4|−6|0), D(7|−1|−3)

8.61 Für den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Diagonalen eines Vierecks ABCD gilt: $M = \frac{1}{4} \cdot (A + B + C + D)$ BD
1) Zeige die Gültigkeit anhand des Vierecks A(2|9|11), B(3|1|−7), C(−4|−8|2), D(−2|−3|0).
2) Beweise die Aussage allgemein.

8.5 Vektorprodukt (Vektorielles Produkt, Kreuzprodukt)

Definition des Vektorprodukts

C **8.62** ***1)*** Was erfordert weniger Kraft zum Zu- bzw. Herausdrehen einer Schraubenmutter, den Schraubenschlüssel so wie in der Abbildung oder näher bei der Mutter zu halten?
2) Überlege, in welche Richtung sich die Mutter jeweils bewegt, wenn der Schraubenschlüssel im bzw. gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird.

In Abschnitt 8.3 wurde das Skalarprodukt verwendet, um unter anderem die an einem Körper, der entlang einer Strecke bewegt wird, verrichtete Arbeit zu ermitteln. Zur Untersuchung der Auswirkungen von Drehbewegungen benötigt man einen weiteren Begriff aus der Vektorrechnung.

Ein Moment ist das Maß für die Wirkung einer Kraft. Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht ist das Drehmoment $\vec{M}$ bekannt. Übt man zum Beispiel mithilfe eines Korkenziehers Kraft auf einen Korken aus, so bewegt sich das Gewinde entweder in den Korken hinein oder aus dem Korken heraus, je nachdem, in welche Richtung der Korkenzieher gedreht wird. Diese Wirkung, also das **Drehmoment**, ist daher eine **gerichtete Größe**. Das Drehmoment kann anhand der Bewegung einer Kreisscheibe veranschaulicht werden:

Die Scheibe dreht sich nicht, es ist keine Wirkung vorhanden.

Die Scheibe beginnt sich zu drehen, die Wirkung $\vec{M}$ ist erkennbar und messbar.

Die Scheibe dreht sich schneller, $\vec{M}$ ist vergleichsweise größer.

$\vec{F}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$ und $\vec{M}$ sind gerichtete Größen. Der Vektor $\vec{M}$ steht sowohl auf den Vektor $\vec{F}$ als auch auf den Vektor $\vec{r}$ normal. Sein Betrag $|\vec{M}|$ hängt von $|\vec{F}|$ und von $|\vec{s}| = |\vec{r}| \cdot \sin(\varphi)$ ab. Für das Drehmoment gilt also:

$\vec{M} = |\vec{r}| \cdot \sin(\varphi) \cdot |\vec{F}| \cdot \vec{n_0}$, $\quad \vec{n_0}$ ... Einheitsvektor, normal auf $\vec{r}$ und $\vec{F}$ (vergleiche Rechte-Hand-Regel)

Allgemein gilt für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

Der Vektor $\vec{c}$, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ normal steht und für dessen Länge $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ gilt, wird **Vektorprodukt**, **vektorielles Produkt** oder **Kreuzprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genannt.

Man schreibt: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ [sprich: „a kreuz b"]

Unter Verwendung dieser Schreibweise ergibt sich für das Drehmoment:

$\vec{M}$ = „Kraftarm x Kraft" $= \vec{r} \times \vec{F}$

Auch der **Drehimpuls** ist ein Vektor, der sich mithilfe des Vektorprodukts ermitteln lässt. Das Produkt aus der Masse m eines Massepunkts und seiner Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird als Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ bezeichnet. Da die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, ist auch der Impuls ein Vektor. Wirkt nun ein Impuls $\vec{p}$ auf einen Massepunkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}$, so entsteht ein Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Vektorprodukt (vektorielles Produkt, Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt einen Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, für den gilt:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$ ... Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms
- $\vec{c}$ steht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ normal; $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.

Drehmoment und Drehimpuls

Für das durch eine Kraft $\vec{F}$ hervorgerufene Drehmoment $\vec{M}$ gilt: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Für den durch einen Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ hervorgerufenen Drehimpuls $\vec{L}$ gilt: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Dabei ist $\vec{r}$ der Vektor vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}$ bzw. des Impulses.

Das Vektorprodukt kann auch in Koordinatenschreibweise angegeben werden.

Berechnung des **Vektorprodukts in Koordinatenschreibweise**:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Um sich diese Formel leichter zu merken, gibt es verschiedene Merkhilfen, zum Beispiel:

- $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ mit darunter wiederholten a_x, a_y bzw. b_x, b_y (über Kreuz verbunden) $=$

$$\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{1. Zeile} \\ \text{2. Zeile} \\ \text{3. Zeile} \end{matrix}$$

- Berechnung mithilfe von Unterdeterminanten: In der Determinante für die Berechnung der x-Komponente „fehlen" die x-Komponenten, usw.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

8.63 Berechne das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 18 \end{pmatrix}$. B

Lösung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 18 - (-9) \cdot (-11) \\ (-9) \cdot (-3) - 6 \cdot 18 \\ 6 \cdot (-11) - (-4) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -171 \\ -81 \\ -78 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Vektorprodukts:

- Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, es gilt jedoch: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
  Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem; $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$ bilden ein Linkssystem.
- Es gilt das Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$

Flächen- und Volumenberechnungen mithilfe des Vektorprodukts

A **8.64** Wie lautet die trigonometrische Flächenformel für das Dreieck ABC?

Gemäß der Definition für das Vektorprodukt gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$, wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist und $0° < \varphi < 180°$ gilt. Dieser Betrag entspricht der doppelten Maßzahl des Flächeninhalts eines von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks. Somit gilt für den Flächeninhalt $A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$, der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms beträgt $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Flächeninhalt eines von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten **Parallelogramms**: $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Flächeninhalt eines von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten **Dreiecks**: $A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$

B **8.65** Berechne den Flächeninhalt des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks.

Lösung:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \cdot (-2) - 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 8 - (-4) \cdot (-5) \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -16 \\ -13 \\ -12 \end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} -16 \\ -13 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-16)^2 + (-13)^2 + (-12)^2} = \sqrt{569} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{569} = 11{,}926\ldots$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 11,9 E^2.

Unter einem **Parallelepiped** – auch **Spat** genannt – versteht man einen Körper, der von sechs paarweise kongruenten, in parallelen Ebenen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird. Das altgriechische Wort „epipedon" bedeutet so viel wie „Fläche". Die Bezeichnung Spat für ein Parallelepiped bezieht sich auf das Mineral Kalkspat, das in der abgebildeten Form auskristallisiert. Dieser Körper wird durch drei Vektoren im Raum aufgespannt, sein Volumen entspricht dem Betrag des **Spatprodukts** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

Dieser Wert ist positiv, wenn es sich bei den drei Vektoren um ein Rechtssystem handelt, sonst ist er negativ. Liegen die drei Vektoren in einer Ebene, so ist das Spatprodukt gleich null.

Volumen eines Parallelepipeds:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$$

Volumen eines Tetraeders:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

B **8.66** Berechne das Volumen des von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ aufgespannten Körpers.

Lösung:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 24 \\ -27 \\ -63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = |-48 + 441| = 393$$

Das Volumen beträgt 393 E^3.

Technologieeinsatz: Vektorprodukt

TI-Nspire

TE

B

Mathcad, GeoGebra: www.verlaghpt.at

8.67 Für eine Skulptur wird eine Marmorsäule angefertigt (vergleiche Abbildung). Die Koordinaten der Eckpunkte A(0|0|0), B(45|0|0), D(20|18|0) und E(5|0|90) sind gegeben (Maße in cm).

1) Ermittle den Flächeninhalt der Grundfläche der Säule.

2) Berechne den Winkel, den die Kante AB mit der Kante AE einschließt.

3) Berechne die Masse der Säule, wenn die Dichte des verwendeten Marmors $\rho = 2{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt.

E z A B D x y

Lösung:

1)

1.1 *Nicht gespeicherte

$a:=\begin{bmatrix}45\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}45\\0\\0\end{bmatrix}$

$b:=\begin{bmatrix}20\\18\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}20\\18\\0\end{bmatrix}$

c:=[5;0;90]

$f:=\text{crossP}(a,b)$ $\begin{bmatrix}0\\0\\810\end{bmatrix}$

$flaeche:=\text{norm}(f)$ 810

- Die Vektoren werden gespeichert: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$
- Die Grundfläche ist ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt $f = |\vec{a} \times \vec{b}|$ beträgt.

  Für die Berechnung des Vektorprodukts steht der Befehl **crossP(** zur Verfügung, der eingetippt oder über das Menü **7: Matrix und Vektoren**, **C: Vektor**, **3: Kreuzprodukt** aufgerufen werden kann. Den Betrag des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ erhält man mithilfe des Befehls **norm(** im Menü **7: Matrix und Vektoren**, **7: Normen**, **1: Norm**.

Die Säule hat eine Grundfläche von 810 cm².

2)

$w:=\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a,c)}{\text{norm}(a)\cdot\text{norm}(c)}\right)$ 86.8202

- Das Skalarprodukt wird mithilfe des Befehls **dotP(** ermittelt, das Winkelmaß **Grad** ist eingestellt.

Der Winkel zwischen den Kanten AB und AE beträgt rund 86,8°.

3)

$v:=|\text{dotP}(\text{crossP}(a,b),c)|$ 72900

$\frac{72900\cdot 2.9}{1000}$ 211.41

- Die Säule hat die Form eines Parallelepipeds. Beachte bei der Eingabe der Formel, dass $|(\vec{a} \times \vec{b})| \cdot \vec{c}$ ein Skalar ist. Der Betrag einer Zahl kann nicht mithilfe von **norm(** ermittelt werden, sondern wird mit dem Befehl **abs(** aus dem Menü **2: Zahl**, **9: Komplex**, **5: Betrag** ermittelt.

Die Säule hat eine Masse von rund 211 kg.

A **8.68** Gib die Länge und die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ an, wenn der Vektor $\vec{a}$ in Richtung der negativen x-Achse und $\vec{b}$ in Richtung der positiven y-Achse verläuft.

AD **8.69** Veranschauliche durch eine Skizze und beweise rechnerisch:
Liegen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der xy-Ebene, so verläuft $\vec{a} \times \vec{b}$ parallel zur z-Achse.

D **8.70** Ändert sich das Vorzeichen von $\vec{a} \times \vec{b}$, wenn die Vorzeichen aller Komponenten von
1) $\vec{a}$ ***2)*** $\vec{b}$ ***3)*** $\vec{a}$ und $\vec{b}$
geändert werden? Begründe deine Antworten.

D **8.71** Beschreibe mit eigenen Worten den Unterschied zwischen den beiden Drehmomenten $\overrightarrow{M_1} = \vec{r} \times \vec{F}$ und $\overrightarrow{M_2} = \vec{F} \times \vec{r}$.

AC **8.72** Trage die Richtung des fehlenden Vektors $\vec{M}$, $\vec{r}$ oder $\vec{F}$ und die Drehrichtung ein.
Hinweis: Verwende die Rechte-Hand-Regel.

1) $\vec{r}$, $\vec{F}$ ***2)*** $\vec{F}$, $\vec{M}$ ***3)*** $\vec{r}$, $\vec{M}$

B **8.73** Berechne das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.
a) A(−1|3|2), B(−4|3|9), C(4|28|24) **b)** A(6|−3|−4), B(−2|10|12), C(2|23|10)

B **8.74** Berechne den Betrag des Vektorprodukts $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.
a) A(2|4|−4), B(12|−2|7), C(12|−15|15) **b)** A(5|6|5), B(9|0|−3), C(−2|−13|14)

BCD **8.75** Vergleiche die Ergebnisse $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und beschreibe, was dir auffällt.

B **8.76** Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
TE
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

B **8.77** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
TE
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

B **8.78** Berechne das Volumen des Parallelepipeds.
TE
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$

8.79 Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 22 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

8.80 Ein Quader ABCDEFGH hat die Seitenlängen a, b und h. BD

1) Gib die Koordinaten seiner Eckpunkte an, wenn A im Koordinatenursprung liegt und kein Eckpunkt negative Koordinaten hat.

2) Ermittle sein Volumen mithilfe der Vektorrechnung und zeige die Gültigkeit der Volumenformel $V = a \cdot b \cdot h$.

8.81 Ein Massepunkt befindet sich im Punkt P(3 m|11 m|–7 m). Welches Drehmoment bezüglich des Koordinatenursprungs entsteht, wenn an diesem Punkt eine Kraft $\vec{F}$ wirkt? BC

a) $\vec{F} = \begin{pmatrix} 34 \\ 2 \\ -19 \end{pmatrix}$ N **b)** $\vec{F} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$ N

8.82 Ein Massepunkt mit einer Masse von 20 g befindet sich x = 20 cm, y = 15 cm und z = 18 cm vom Koordinatenursprung entfernt und dreht sich um den Koordinatenursprung, wobei für den Geschwindigkeitsvektor gilt: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$. ABD

Berechne den Drehimpuls.

8.83 An einen Körper, dessen Massenmittelpunkt im Ursprung liegt, greift im Punkt $R(r_x|r_y|r_z)$ eine Kraft $\vec{F}$ in Richtung der y-Achse an. Von welchen Koordinaten von R hängt das dabei entstehende Drehmoment ab? AC

8.84 Auf einen Massenpunkt in $R(r_x|r_y|r_z)$ wirkt ein Impuls $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$. Wie lauten die Koordinaten des Punkts R, wenn der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{0}$ ist? ACD

Begründe deine Antwort durch eine Skizze und mithilfe des Vektorprodukts.

8.85 Bei starkem Wind wirkt auf die Ampel eine Kraft von $\vec{F} = \begin{pmatrix} 120 \\ 285 \\ 0 \end{pmatrix}$ N. AB

Berechne das dadurch im Fußpunkt der Stange entstehende Drehmoment.

8.86 Beweise **1)** mit, **2)** ohne Verwendung der Koordinatenschreibweise des Vektorprodukts, dass $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ gilt. BD

8.87 Beweise, dass BD

1) $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$ gilt.

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}$ gilt.

8.6 Geraden in der Ebene

8.6.1 Parameterdarstellung

BC **8.88** Zeichne die Gerade $y = x + 5$ in ein Koordinatensystem ein. Beschreibe, wie man einen Vektor in Richtung der Geraden ermitteln kann.

Die Richtung einer Geraden in der Ebene kann mithilfe von Vektoren, den so genannten **Richtungsvektoren**, beschrieben werden. Ein Richtungsvektor der Geraden $y = \frac{1}{2} \cdot x - 3$ ist zum Beispiel

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ oder $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Es kann aber auch jeder andere Vektor, der parallel zu $\vec{a}$ ist, verwendet werden. Kennt man von einer Geraden in der Ebene einen Punkt P und ihre Richtung $\vec{a}$, so lässt sich der Weg zu jedem anderen Punkt X der Geraden mithilfe eines Parameters beschreiben.

Parameterdarstellung einer Geraden:

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Oft schreibt man auch kurz g: $X = P + t \cdot \vec{a}$.

B **8.89** Gegeben ist die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Welche Punkte ergeben sich für $t = 2$ bzw. $t = -1{,}5$?
Stelle das Ergebnis in einer Zeichnung dar.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1|8)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1{,}5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B(4{,}5|1)$$

BC **8.90** Ermittle die fehlende Koordinate, wenn $A(5|y_A)$ auf der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt. Dokumentiere deinen Lösungsweg.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$5 = 3 + t \Rightarrow t = 2$

$y_A = 2 + 4t$

$y_A = 2 + 4 \cdot 2 = 10 \Rightarrow A(5|10)$

Liegt der Punkt A auf der Geraden g, so muss der Parameter t sowohl für die x- als auch für die y-Koordinate den gleichen Wert annehmen. Die erste Gleichung liefert $t = 2$; dieser Wert wird in die zweite Gleichung eingesetzt.

8.91 Ermittle eine Parameterdarstellung der Geraden g, die durch die Punkte A(3|7) und B(6|−2) verläuft. Dokumentiere den Lösungsweg. BC

Lösung:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist ein Richtungsvektor der Geraden g, daher ist auch der zu $\overrightarrow{AB}$ parallele Vektor ein Richtungsvektor von g. Als Punkt der Geraden kann A oder B gewählt werden.

Lagebeziehungen von zwei Geraden

Zwei Geraden in der Ebene können parallel oder ident sein oder einen Schnittpunkt haben. Zur Berechnung des Schnittpunkts werden die Parameterdarstellungen komponentenweise gleichgesetzt. Die Anzahl der Lösungen des entstehenden Gleichungssystems hängt von der gegenseitigen Lage ab.

Existiert ein Schnittpunkt, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

ZB: $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$g \cap h\colon \left.\begin{array}{l}1 + 2r = -4 + 3s\\ 4 + 5r = 2 + 4s\end{array}\right\}\ r = 2,\ s = 3$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\14\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten S(5|14).

Sind die Geraden parallel bzw. ident, hat das Gleichungssystem keine bzw. unendlich viele Lösungen.

ZB: $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$; $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$; $k\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

$g \cap h$:

$\left.\begin{array}{l}1 + 2r = 5 - s \quad |\cdot 4\\ 5 - 8r = -3 + 4s\end{array}\right\}+$

$9 = 17$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, die Geraden sind zueinander parallel.

$g \cap k$:

$\left.\begin{array}{l}1 + 2r = 4 - s \quad |\cdot 4\\ 5 - 8r = -7 + 4s\end{array}\right\}+$

$9 = 9$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die Geraden sind ident.

In beiden Fällen sind die Richtungsvektoren zueinander parallel: $\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

8.92 Berechne die Koordinaten der Punkte der Geraden g mit den Parametern t_1 und t_2. B

a) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}9\\-8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$, $t_1 = 3$; $t_2 = -5$ **b)** $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$, $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{1}{4}$

8.93 Gib die Gleichung der Geraden g, auf der die beiden Punkte liegen, in Parameterform an. B

a) g: A(6|−2), B(3|0) **b)** g: M(−9|4), N(5|6) **c)** g: R(15|−11), S(−23|19)

ABCD **8.94** ***1)*** Gib die Gleichung der abgebildeten Geraden in Parameterform an, verwende dabei den Punkt A und den Vektor $\vec{a}$.
2) Erkläre das Prinzip der Parameterform anhand der abgebildeten Punkte P_1, P_2 und P_3. Gib für jeden dieser Punkte den Parameter t an.
3) Erstelle eine ähnliche Abbildung mit selbst gewählten Werten.

AD **8.95** Welche der folgenden Behauptungen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antworten.
1) Geraden mit gleichen Richtungsvektoren sind ident.
2) Haben zwei Geraden verschiedene Richtungsvektoren, so haben sie einen Schnittpunkt.
3) Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind.

B **8.96** Gib die Gleichungen der Geraden in Parameterform an und berechne den Schnittpunkt.
a) g_1: A(6|7), B(12|−2), g_2: C(−4|6), D(6|−4) ***b)*** g_1: A(1,5|−9), B(9,5|−7), g_2: C(5|7), D(−2|4)

8.6.2 Parameterfreie Darstellung

BD **8.97** Stelle die Gerade g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ grafisch dar. Ermittle den Anstieg der Geraden und den Schnittpunkt mit der y-Achse aus der Zeichnung.
Erkläre den Zusammenhang zwischen dem Richtungsvektor und dem Steigungsdreieck einer Geraden.

Eine in Parameterform angegebene Gerade kann parameterfrei dargestellt werden, indem man den Parameter eliminiert.

ZB: Die Gerade g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soll in der Form y = k · x + d angegeben werden.

$$\begin{aligned} x &= 5 + 2t \\ y &= -3 + 3t \end{aligned}$$

- Die Gleichung wird in x- und y-Koordinaten „zerlegt".

$$\begin{aligned} 3x &= 15 + 6t \\ -2y &= 6 - 6t \end{aligned}$$

- Anschließend wird so multipliziert und zusammengefasst, dass der Parameter t eliminiert wird.

$$3x - 2y = 21 \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}5x - 10{,}5$$

- „Probe": Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Besonders einfach lässt sich eine parameterfreie Darstellung mithilfe der **Normalvektorform** angeben. Der Vektor $\vec{n}$ ist ein Normalvektor des Richtungsvektors $\vec{v}$, P ist ein fixer Punkt der Geraden.
Es gilt: $\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$

Normalvektorform der Geraden g:
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$

8.98 Gib die Normalvektorform der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ an. B

Lösung:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(-2|-5)$

- Normalvektor angeben

$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ g: $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1$

- Skalarprodukte berechnen

Aus der Normalvektorform kann mithilfe des Skalarprodukts die Gerade unmittelbar in der Form $ax + by = c$ angegeben werden.

Die Koeffizienten der Geraden entsprechen dabei den Komponenten des Normalvektors, zB:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow 5x - 3y = 4$$

8.99 Gib die Geradengleichung in parameterfreier Form an. B

a) g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 13 \end{pmatrix}$ **b)** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ -6 \end{pmatrix}$ **c)** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 27 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix}$

8.100 Bestimme die Normalvektorform der Geraden. B

a) g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix}$ **b)** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ **c)** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

8.101 Gib die Gleichung der Geraden in Parameterdarstellung an. B

a) $y = 4x - 11$ **b)** $5x - 2y = -10$ **c)** $6x + 8y - 15 = 0$

8.102 Welche Geraden kann man in Parameterform, aber nicht in der Form $y = k \cdot x + d$ angeben? Begründe deine Antwort und gib ein Beispiel an. AD

8.103 Überlege, wie man eine Parameterdarstellung der Geraden $ax + by = c$ finden kann. Erläutere deine Vorgehensweise. AC

8.104 Für ein Geocaching im Schulhof wird folgender Plan (Maße in Meter) entworfen: AB

$A(0|0)$, $D(30{,}2|35{,}4)$ ... Ecken des Schulhofs

$B(28|16{,}5)$ ... Baum, $C(2{,}5|30)$ ... Trinkbrunnen

Die Dose mit dem Logbuch befindet sich im Punkt E, dem Schnittpunkt der Strecke AB mit der Streckensymmetrale von CD.

Gib die Gleichung der Geraden durch AB und die Gleichung der Streckensymmetrale von CD jeweils in Parameterdarstellung an und ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts E.

8.105 Die Cramer'sche Regel (vergl. Band 1) besagt, dass das Gleichungssystem BD

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$

II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

genau dann eindeutig lösbar ist, wenn die Determinante $D \neq 0$ ist.

Begründe mithilfe der Vektorrechnung, warum für den Fall $D = 0$ die beiden Geraden parallel oder ident sein müssen.

8.7 Geraden und Ebenen im Raum

8.7.1 Geraden im Raum

Geraden im Raum ($\mathbb{R}^3$) können nicht nur ident, parallel oder schneidend sein, sondern auch zueinander windschief. Das bedeutet, dass sie weder parallel sind noch einen Schnittpunkt haben.

Da es unendlich viele Vektoren gibt, die auf einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ normal stehen, gibt es zu jeder Geraden im Raum unendlich viele andere Geraden, die normal auf diese stehen. Man kann daher keine Normalvektorform einer Geraden im Raum angeben.

Geraden im Raum werden wie Geraden in der Ebene mithilfe einer Parameterdarstellung angegeben.

Parameterform einer Geraden im Raum: g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$

BC **8.106** Welche Lagebeziehung haben die Geraden g_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ und g_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ zueinander?

Lösung:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

- Die beiden Geraden sind nicht parallel.

$4 + 3t = 8 - 2s$

$1 - 9t = 11 + 7s$

$s = -22;\ \ t = 16$

- Gleichungssystem lösen, um die Parameter zu berechnen.

g_1: $\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 16 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ -143 \\ -56 \end{pmatrix}$

g_2: $\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} - 22 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ -143 \\ -199 \end{pmatrix}$

- Beide Parameter werden in die Geradengleichungen eingesetzt. Es ergeben sich unterschiedliche 3. Koordinaten. Die beiden Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt), sind also windschief.

A **8.107** Gib die Gleichung der ***1)*** x-Achse, ***2)*** y-Achse und ***3)*** z-Achse in Parameterform an.

B **8.108** Stelle die Geradengleichung auf.
a) g: A(7|1|−3), B(−7|0|−9) ***b)*** g: A(−4|10|2), B(3|−4|−8) ***c)*** g: A(9|−2|5), B(8|11|−6)

B **8.109** Berechne die fehlenden Koordinaten für $P \in g$.
a) g: A(−7|6|11), B(4|3|25); $P(4|y_A|z_A)$ ***b)*** g: A(15|0,5|−11), B(6|−15,5|7); $P(x_A|3{,}5|z_A)$

BC **8.110** Welche Lagebeziehung haben die Geraden g_1 und g_2 zueinander?
a) g_1: A(9|13|−4), B(−11|13|10); g_2: C(4|14|−4), D(13|−13|−10)
b) g_1: A(5|−12|8), B(11|−30|0); g_2: C(2|−12|9), D(−10|21|24)

AB **8.111** Das Seil eines Hochseilakrobaten wird zwischen zwei Häusern auf einem großen Platz gespannt und verläuft annähernd geradlinig. Die Koordinaten der Endpunkte des Seils sind bekannt (Angaben in Meter): Anfangspunkt A(3,6|2,1|1,5), Endpunkt E(17,5|24,0|7,3)
1) Gib die Gleichung der Geraden an, die den Seilverlauf beschreibt.
2) Ermittle die Koordinaten des Punkts, an dem sich der Seiltänzer befindet, wenn er bereits vier Meter am Seil zurückgelegt hat.
3) Die Balancierstange wird waagrecht und normal zum Seil gehalten. Gib die Gleichung der Geraden an, die durch die Balancierstange verläuft, wenn der Seiltänzer in dem in ***2)*** berechneten Punkt steht und sich die Stange 1,5 m über seinen Füßen befindet.

8.7.2 Ebenen im Raum

Ist eine Ebene im Raum durch einen Punkt und zwei Vektoren festgelegt, so kann man deren Parameterform angeben:
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Da der Normalvektor auf eine Ebene eindeutig bestimmt ist, kann man eine Ebene im Raum auch in Normalvektorform angeben.

Gleichung einer Ebene

Man erreicht jeden Punkt X(x|y|z) einer Ebene, indem man zu einem festen Punkt $P(x_P|y_P|z_P)$ den Richtungsvektor $\vec{a}$ „s-mal“ und den Richtungsvektor $\vec{b}$ „t-mal“ addiert:

$\varepsilon: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

Normalvektorform: $\varepsilon: n \cdot \overrightarrow{OX} = n \cdot \overrightarrow{OP} \Rightarrow \varepsilon: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

8.112 Gib die Gleichung der Ebene an, die durch die Punkte A(1|0|3), B(2|5|−3) und C(−4|2|1) gegeben ist. ***1)*** in Parameterform ***2)*** in Normalvektorform B

Lösung:

1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 27 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 27 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\varepsilon: 2x + 32y + 27z = 0$

- Zwei Vektoren, die in der gesuchten Ebene liegen, werden ermittelt.
- Als fester Punkt kann jeder Punkt der Ebene verwendet werden, zB A.
- Der Normalvektor wird mithilfe des Vektorprodukts ermittelt.
- Das Skalarprodukt wird berechnet.

8.113 Gib einen Normalvektor der Ebene an. C

1) $\varepsilon: 3x - 5y + 8z = 17$ ***2)*** $\varepsilon: -x + z = 3$ ***3)*** $\varepsilon: y + 2z = 0$

8.114 Gib die Gleichung der ***1)*** xy-Ebene, ***2)*** xz-Ebene, ***3)*** yz-Ebene in Parameterform und in Normalvektorform an. B

8.115 Gib die Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C an. B

1) in Parameterform ***2)*** in Normalvektorform

a) A(3|−5|7), B(4|−3|0), C(11|0|8) ***b)*** A(23|25|17), B(−12|31|25), C(18|0|18)

8.116 Zu Dekorationszwecken soll eine dreieckige Platte (siehe Skizze, Maße in dm), in einer Ecke des Raums angebracht werden. Zur Befestigung wird noch eine Stange von der Ecke aus, normal auf die Platte stehend, angebracht. AB

1) Berechne die Länge der Stange.

2) Berechne die Masse der Platte, wenn 1 m^2 des verwendeten Materials 3,5 kg hat.

Vektoren

Zusammenfassung

Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten **Parallelogramms**:

$$A_P = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_x b_y - a_y b_x|$$

Vektorprodukt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$, $0° < \varphi < 180°$ bzw. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$

Volumenberechnung: Parallelepiped: $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ Tetraeder: $V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Geradengleichung

im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$: Parameterform ... g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$

im $\mathbb{R}^2$: Normalvektorform ... g: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ bzw. g: $ax + by = c$

Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$:

Parameterform: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Normalvektorform: ε: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ bzw. ε: $ax + by + cz = d$

Weitere Aufgaben

Aufgaben 8.117 – 8.118: Berechne jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren und den Winkel, den die beiden Vektoren miteinander einschließen.

B **8.117** **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$

B **8.118** **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

C **8.119** Welche Lagebeziehung haben die Geraden g_1 und g_2 zueinander?

a) g_1: $y = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, g_2: $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** g_1: $y = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$, g_2: $y = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

B **8.120** Berechne im gegebenen Parallelogramm ABCD.

1) Flächeninhalt ***2)*** Umfang ***3)*** Höhen ***4)*** fehlende Koordinaten

a) A(5|−4), B(7|−), C, D(−5|−3) **b)** A(6|−3|9), B(−1|7|−2), C(2|−4|3), D

B **8.121** Berechne das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$.

a) A(−3|9|5), B(3|2|8), C(1|1|−4), D(−1|8|4) **b)** A(3|4|4), B(12|−1|−3), C(2|7|2), D(9|4|5)

B **8.122** Berechne das Volumen des Parallelepipeds mit den gegebenen Eckpunkten.

a) A(1|13|7), B(5|6|4), C(15|3|−4), E(12|9|8) **b)** F(1|2|7), G(3|1|−2), H(−1|3|−6), C(3|0|1)

B **8.123** Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g_1 und g_2.

a) g_1: A(3|−1), B(−4|2), g_2: C(−4|6), D(0|−4) **b)** g_1: A(5|3), B(−2|−2), g_2: C(−4|5), D(0|−7)

8.124 Gib die Gleichung der Geraden, auf der die beiden Punkte liegen, in allen besprochenen Darstellungen an. B

a) A(6|−2), B(3|0) **b)** K(−9|4), L(5|6) **c)** R(15|−11), S(−23|19)

8.125 Gib die Gleichung der Ebene ε in allen besprochenen Darstellungsformen an. B

a) ε: A(8|20|−1), B(15|−7|12), C(−3|9|6) **b)** ε: A(14|13|−5), B(10|−2|−18), C(16|1|0)

8.126 Gib drei verschiedene Bedingungen für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an, sodass $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$ gilt, und begründe deine Antwort. AD

8.127 Auf einen Massepunkt in P(2 m|3 m|0 m) wirkt eine Kraft $\vec{F} = (10, 3, 5)$ N. Ermittle das durch diese Kraft erzeugte Drehmoment bezüglich des Koordinatenursprungs. B

8.128 Gib die Gleichung einer Geraden im Raum an, die normal auf AB

1) die xy-Ebene, **2)** die z-Achse, **3)** die Ebene ε: x + y + z = 5 steht.

8.129 Überlege, wie das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Skalarprodukt von AD

1) $\overrightarrow{{}_a n_L}$ und $\overrightarrow{{}_b n_L}$, **2)** $\overrightarrow{{}_a n_R}$ und $\vec{b}$ zusammenhängt. Begründe deine Antwort.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann den Vektor zwischen zwei Punkten angeben, zB A(4|−5), B(−3|7).	
2	Berechne $\lvert\vec{a}\rvert$, $\vec{a_0}$ und $\vec{n_L}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.	
3	Ich kann das Skalarprodukt erklären und auf zwei Arten berechnen.	
4	Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$: A(3|5|1), B(2|−1|3), C(−1|−2|8)	
5	Ich kann die gegenseitige Lage von Geraden in der Ebene anhand der Parameterdarstellung erkennen.	
6	Gib die Gerade $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ in Normalvektorform an.	
7	Ich kann physikalische Anwendungen des Vektorprodukts angeben.	
8	Berechne die fehlende Koordinate, sodass die beiden Vektoren orthogonal sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	
9	Welche der Behauptungen ist richtig? Begründe deine Antwort. A) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ oder B) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	
10	Ich kann begründen, warum es keine Normalvektorform einer Geraden im Raum gibt.	
11	Gib die Parameterform und die Normalvektorform der Ebene durch die Punkte A(0|3|−1), B(−2|4|0) und C(1|0|1) an.	

Lösung:
1) (−7, 12) 2) 10; (0,8; 0,6); (−6; 8) 3) siehe Seiten 216ff. 4) $\varphi \approx 28{,}6°$ 5) siehe Seite 233
6) 5x + 3y = 10 7) Drehmoment, Drehimpuls 8) $a_z = \frac{7}{4}$ 9) siehe Seite 227 10) siehe Seite 236
11) zB: $\overrightarrow{OX} = (0, 3, -1) + s \cdot (-2, 1, 1) + t \cdot (1, -3, 2)$; x + y + z = 2

9 Matrizen und Determinanten

Tabellen sind ein wichtiges Mittel, um technische, wissenschaftliche und wirtschaftliche Vorgänge anschaulich darzustellen. Sie eignen sich zum Beispiel in der Wirtschaft zur Planungsrechnung sowie zur Berechnung von Materialverflechtungen. In der Technik werden sie bei statischen Berechnungen oder bei der Untersuchung von elektrischen Netzwerken verwendet. Das Rechnen mit Matrizen liefert Methoden, die zur Weiterverarbeitung tabellierter Zahlenwerte dienen.

9.1 Definitionen

ACD **9.1** In der Abschlusstabelle der Gruppe D aus der Vorrunde der UEFA Champions League 2000/01 lag ein österreichischer Club in Führung.

	Verein	Sp.	S	U	N	Tore	Diff.	P
1.	Sturm Graz	6	3	1	2	9:12	−3	10
2.	Galatasaray Istanbul	6	2	2	2	10:13	−3	8
3.	Glasgow Rangers	6	2	2	2	10:7	+3	8
4.	AS Monaco	6	2	1	3	13:10	+3	7

1) Überlege, wie man aus der Anzahl der Siege „S“ (3 Pkt.), der Unentschieden „U“ (1 Pkt.) und der Niederlagen „N“ (0 Pkt.) die Gesamtpunkteanzahl „P“ erhält.

2) Welcher Zusammenhang besteht zwischen „S“, „U“ und „N“ und der Spalte „Sp.“ der Anzahl der Spiele?

3) Was müsste man an der Tabelle verändern, um mithilfe einfacher Methoden aus der Spalte „Tore“ die Eintragungen aus der Spalte „Diff.“ für die Tordifferenz zu erhalten?

ZB: Zur Herstellung von Produkten P1, P2, P3 und P4 werden von einem Betrieb mehrere Rohstoffe R1, R2 und R3 in unterschiedlichen Mengen benötigt. Die Zusammensetzungen können übersichtlich in einer Tabelle angegeben werden, wobei die Zahlenwerte die erforderlichen Mengeneinheiten angeben.

	R1	R2	R3
P1	3	2	4
P2	5	0	1
P3	1	3	2
P4	0	1	3

Ist der Zusammenhang zwischen Daten bzw. deren Bedeutung klar, kann man sich auf die Darstellung der Zahlenwerte beschränken.
Ein solches Zahlenschema bezeichnet man als **Matrix** (Mehrzahl: Matrizen), zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix A aus 4 Zeilen und 3 Spalten besteht, bezeichnet man sie als (4 x 3)-Matrix bzw. (4,3)-Matrix [sprich: „4 kreuz 3“- bzw. „4 mal 3“-Matrix].

In der Matrix A ist in den Zeilen jeweils die Materialzusammensetzung eines Produkts angegeben, in den Spalten sind jeweils die erforderlichen Rohstoffmengen für die vier Produkte eingetragen.

Allgemein wird mit a_{ij} das Element in Zeile i und Spalte j bezeichnet, zum Beispiel ist a_{32} jenes Element der Matrix, das in der 3. Zeile und in der 2. Spalte steht.
Merkhilfe: „**Z**eile **z**uerst, **S**palte **s**päter“

1. Spalte 2. Spalte ... n-te Spalte

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{1. Zeile} \\ \dots \\ \text{3. Zeile} \\ \dots \\ \text{m-te Zeile} \end{matrix}$$

Spezielle Arten von Matrizen

- **Zeilenvektor**
  Einzeilige Matrix, zB: $A = (3 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 2)$

- **Spaltenvektor**
  Einspaltige Matrix, zB: $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- **Nullmatrix O**
  Alle Elemente der Matrix haben den Wert null, zB: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Quadratische Matrix**
  Es gibt gleich viele Zeilen und Spalten, zB (3 x 3)-Matrix: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 12 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

  Die Anzahl der Zeilen und Spalten einer quadratischen Matrix wird als **Ordnung** bezeichnet. Eine (n x n)-Matrix hat die Ordnung n.

- **Diagonalmatrix**
  Quadratische Matrix, bei der alle Elemente, die nicht in der Hauptdiagonalen – das ist die Diagonale von links oben nach rechts unten – stehen, den Wert null haben.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- **Einheitsmatrix E**
  Diagonalmatrix, bei der alle Elemente der Hauptdiagonale gleich 1 sind.
  ZB: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matrix in Dreiecksform**
  Alle Elemente unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen haben den Wert null.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

- **Transponierte Matrix**
  Aufgrund der jeweiligen Aufgabenstellung kann es beim Rechnen mit Matrizen notwendig sein, die Daten aus Zeilen und Spalten einer Matrix A zu vertauschen. Die auf diese Art entstehende Matrix $\mathbf{A^T}$ nennt man die transponierte Matrix von A.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- **Symmetrische Matrix**
  Ist $A^T = A$, handelt es sich um eine symmetrische Matrix.
  ZB: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Eine **Matrix** A vom Typ (m x n) bzw. (m,n) ist ein **rechteckiges Zahlenschema** aus m Zeilen und n Spalten. Matrizen werden im Allgemeinen mit Großbuchstaben und runden Klammern angeschrieben.

Die Position jedes **Elements der Matrix** wird mithilfe von Indizes festgelegt.

AC **9.2** Wähle sechs Hauptstädte und recherchiere alle Entfernungen zwischen diesen Städten. Trage die Werte in einer möglichst übersichtlichen Tabelle ein.

C **9.3** Gib den Typ der Matrix an und bestimme die angegebenen Elemente.

a) $M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $m_{23}, m_{11}, m_{13}, m_{21}$

b) $K = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 0 \\ 15 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $k_{32}, k_{23}, k_{12}, k_{31}$

c) $F = (3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -2)$; $f_{14}, f_{12}, f_{13}, f_{11}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $a_{33}, a_{12}, a_{24}, a_{21}$

B **9.4** Transponiere die Matrix.

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $N = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & 20 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$ **c)** $K = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ **d)** $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -b & 1 \\ b & 0 & 1 & a \\ c & 1 & e & 0 \\ -c & -e & 0 & 1 \end{pmatrix}$

AC **9.5** Beantworte die folgenden Fragen anhand eines selbst gewählten Beispiels.
1) Welche Art von Matrix entsteht, wenn man einen Zeilenvektor transponiert?
2) Welche Matrix entsteht, wenn man eine Einheitsmatrix transponiert?

9.2 Rechnen mit Matrizen

ABD **9.6** Ein Smartphone-Hersteller hat die Verkaufszahlen zweier Handy-Modelle MoTeen und MoTwen von drei Vertriebsfilialen F1, F2 und F3 für die Monate März und April in Form von Tabellen festgehalten.

März	F1	F2	F3
MoTeen	89	56	0
MoTwen	31	22	86

April	F1	F2	F3
MoTeen	7	18	93
MoTwen	72	0	78

1) Schreibe beide Tabellen als Matrizen an.
2) Gib eine Matrix für die Summe der Verkaufszahlen von März und April an.
3) Im Mai haben sich die Verkaufszahlen von April verdoppelt. Gib die Matrix der Verkaufszahlen für den Monat Mai an.
4) MoTeen wird um 599,00 € verkauft, MoTwen kostet 678,50 €. Schreibe die Preise in Form eines Zeilenvektors an. Überlege ein Rechenverfahren, mit dem man mit der Matrix aus **2)** und der Preismatrix eine Matrix für den Umsatz der Filialen ermitteln kann.

9.2.1 Matrizenaddition und -subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar

Für die Rechenoperationen Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren mit einem Skalar, also einer Zahl, gelten bei Matrizen ähnliche Regeln wie bei den in Abschnitt 8 behandelten Vektoren.

- Addition und Subtraktion von Matrizen gleichen Typs:
  Gleichplatzierte Elemente werden addiert bzw. subtrahiert.

ZB: $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+(-3) & (-5)+1 \\ 2+(-1) & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-(-3) & (-5)-1 \\ 2-(-1) & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Matrizen unterschiedlichen Typs können weder addiert noch subtrahiert werden.

- Multiplikation mit einem Skalar:
  Jedes Element der Matrix wird mit dem Skalar multipliziert.

ZB: $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot(-5) \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Sind A und B Matrizen vom gleichen Typ (m x n) und ist k eine Konstante mit $k \in \mathbb{R}$, so gilt:

Man erhält die **Summe** bzw. **Differenz** der Matrizen A und B, indem man die Summe bzw. die Differenz jener Elemente von A und B bildet, die dieselben Indizes haben. Die entstehende Matrix C ist ebenfalls vom gleichen Typ.

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Man **multipliziert** eine Matrix A **mit einem Skalar k**, indem man jedes Element der Matrix mit k multipliziert.

$$D = k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Weiters gilt:

- Die Addition ist **kommutativ** und **assoziativ**: $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + O = A$ und $A + (-A) = O$ mit O ... Nullmatrix
- $1 \cdot A = A$ und $0 \cdot A = O$
- $s \cdot (A \pm B) = s \cdot A \pm s \cdot B$ und $(s \pm t) \cdot A = s \cdot A \pm t \cdot A$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

9.7 Gegeben sind die Matrizen A, B und C. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ B

1) Berechne die Summe A + B.
2) Berechne die Differenz C – B.
3) Multipliziere die Matrix B mit der Zahl 1,5.

Lösung:
1) $A + B = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **2)** $C - B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ **3)** $1{,}5 \cdot B = \begin{pmatrix} -7{,}5 & -6 \\ 1{,}5 & 3 \end{pmatrix}$

9.8 Berechne die Summe bzw. die Differenz der Matrizen und multipliziere das Ergebnis mit dem Skalar. B

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$; $k = -6$ **2)** $\begin{pmatrix} 14 & -6 & 12 \\ -5 & 12 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ 10 & 18 & -13 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $k = \frac{1}{5}$

9.9 Ergänze die Elemente der Matrizen so, dass die Rechnung stimmt. B

a) $\begin{pmatrix} -1 & ? & 5 \\ ? & 2 & ? \\ 1 & ? & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? & -7 & ? \\ 6 & ? & 9 \\ ? & -4 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} ? & 8 & -1 \\ ? & -4 & ? \\ -2 & 3 & ? \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & ? & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ -7 & ? & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -3 & ? \\ -6 & ? & -4 \\ ? & 16 & 12 \end{pmatrix}$

9.10 In der Zentrale einer großen Elektronikfirma sind die Verkaufszahlen der Sommermonate von Geräten aus zwei Vertriebsfilialen A und B in Tabellenform eingelangt. Der Geschäftsführer der Filiale C gibt an, jeweils doppelt so viel Geräte verkauft zu haben wie in Filiale A verkauft wurden. Erstelle eine Tabelle mit den Gesamtverkaufszahlen aller drei Filialen für die Sommermonate. Dokumentiere die Berechnung mithilfe von Matrizen. ABC

Filiale A	Flat-Screens	Sat-Receiver	USB-Sticks
Juni	54	12	123
Juni	26	5	88
August	43	14	105

Filiale B	Juni	Juli	August
Flat-Screens	31	34	58
Sat-Receiver	14	25	16
USB-Sticks	143	114	67

9.2.2 Multiplikation von Matrizen

ZB: Auf einer Schihütte werden zwei Sorten Schiwasser angeboten, die sich nur durch das Mischverhältnis von Mineralwasser und Himbeersirup unterscheiden.

Ein Liter Mineralwasser kostet im Handel 0,47 €, ein Liter Himbeersirup 2,99 €.

	Mischung 1	Mischung 2
Sirup	5 Liter	3 Liter
Wasser	25 Liter	27 Liter

Mischverhältnismatrix M (Angaben in Liter): $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 25 & 27 \end{pmatrix}$

Preismatrix P $\left(\text{Angaben in } \frac{€}{\ell}\right)$: $P = (\text{Sirup} \quad \text{Wasser}) = (2{,}99 \quad 0{,}47)$

Um zu ermitteln, wie viel jede Mischung insgesamt kostet, müssen die Literpreise der jeweiligen Zutaten mit ihren Anteilen an den Mischungen multipliziert werden.

Für Mischung 1 ergibt sich: $2{,}99\,\frac{€}{\ell} \cdot 5\,\ell + 0{,}47\,\frac{€}{\ell} \cdot 25\,\ell = 26{,}70\,€$

Für Mischung 2 ergibt sich: $2{,}99\,\frac{€}{\ell} \cdot 3\,\ell + 0{,}47\,\frac{€}{\ell} \cdot 27\,\ell = 21{,}66\,€$

In beiden Fällen werden die Elemente der Zeile von P mit den passenden Elementen der jeweiligen Spalte von M multipliziert und anschließend addiert. Diese Berechnung kann man in kompakter Form als Multiplikation der Matrix P mit der Matrix M anschreiben. Man erhält als Ergebnis eine Matrix, die die Gesamtpreise für 30 Liter beider Sorten angibt:

$$P \cdot M = \left(2{,}99\,\frac{€}{\ell} \quad 0{,}47\,\frac{€}{\ell}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5\,\ell & 3\,\ell \\ 25\,\ell & 27\,\ell \end{pmatrix} = \left(2{,}99\,\frac{€}{\ell} \cdot 5\,\ell + 0{,}47\,\frac{€}{\ell} \cdot 25\,\ell \quad 2{,}99\,\frac{€}{\ell} \cdot 3\,\ell + 0{,}47\,\frac{€}{\ell} \cdot 27\,\ell\right) =$$

$$= (26{,}70\,€ \quad 21{,}66\,€)$$

Das Ergebnis der **Multiplikation zweier Matrizen** A vom Typ (m x n) und B vom Typ (n x r) ist eine Matrix C vom Typ (m x r). Das Element c_{ij} ist dabei das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors der Matrix A mit dem j-ten Spaltenvektor der Matrix B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1r} + a_{12} \cdot b_{2r} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nr} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1r} + a_{m2} \cdot b_{2r} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nr} \end{pmatrix}$$

Merke: „**Zeile mal Spalte**"

Es gilt:

- Man kann Matrizen nur dann miteinander multiplizieren, wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenanzahl der zweiten Matrix ist. Andernfalls ist die Matrizenmultiplikation nicht definiert.
- Die Multiplikation zweier Matrizen ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, spricht man bei der Multiplikation zweier quadratischer Matrizen auch von **linksseitiger** und **rechtsseitiger Multiplikation**.
  $B \cdot A$ ... linksseitige Multiplikation von A mit B
  $A \cdot B$ ... rechtsseitige Multiplikation von A mit B
- $A \cdot O = O$ und $O \cdot A = O$ mit O ... Nullmatrix
- $A \cdot E = A$ und $E \cdot A = A$ mit E ... Einheitsmatrix
- $s \cdot (A \cdot B) = (s \cdot A) \cdot B = A \cdot (s \cdot B)$ mit $s \in \mathbb{R}$

ZB: Die Matrix A soll mit der Matrix B multipliziert werden.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -1$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 8$

...

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 3$

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 14$

...

$$\Rightarrow C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 14 \\ 11 & 6 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur übersichtlichen Gestaltung der Matrizenmultiplikation kann das **Falk'sche Schema** (Dr. Sigurd Falk, deutscher Universitätsprofessor, *1921) angewendet werden.

·	B
A	C = A · B

⇒

			1	3
			3	0
			−2	2
−1	**2**	**3**	$(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = -1$	**3**
4	**2**	**1**	**8**	**14**
2	**3**	**0**	**11**	**6**
−2	**1**	**3**	**−5**	**0**

9.11 Multipliziere die Matrix P mit der Matrix Q. B

a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 0 & 8 \\ 12 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

9.12 Gegeben sind die Matrizen F, G und H. Begründe, ob die folgenden Berechnungen möglich sind und führe sie gegebenenfalls aus. BD

$F = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

1) F · G **2)** F · H **3)** G · H **4)** H · G **5)** G · F **6)** H · F

9.13 Überlege, aus welchen beiden Matrizen die Matrix A durch Multiplikation entstanden sein kann und führe die Multiplikation durch. BC

a) $A = (a \cdot d + b \cdot f \quad a \cdot e + b \cdot g)$

b) $A = \begin{pmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix}$

9.14 Multipliziere die Matrix A erst linksseitig mit der Matrix B, dann rechtsseitig. Multipliziere anschließend die Matrix A mit der geeigneten Einheitsmatrix linksseitig und rechtsseitig. Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf? ABCD

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

9.2.3 Determinanten

B **9.15** Löse das Gleichungssystem mithilfe der Cramer'schen Regel.

I: $2x - 5y = -61$
II: $-3x + 4y = 67$

In Band 1 wurde die Cramer'sche Regel als Methode zum Lösen von linearen Gleichungssystemen vorgestellt. Dabei ist es notwendig, Determinanten zu berechnen. Eine **Determinante** ordnet einer quadratischen Matrix einen Zahlenwert zu.

Determinanten von (2 x 2)- und (3 x 3)-Matrizen

- Berechnen der Determinante einer (2 x 2)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- Berechnen der Determinante einer (3 x 3)-Matrix: **Regel von Sarrus**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Determinanten höherer Ordnung werden meist mittels Technologieeinsatz berechnet.

Eigenschaften von Determinanten

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$, wobei n die Ordnung der Matrix ist.
- Der Wert einer Determinante ist null, wenn mindestens zwei Zeilen bzw. Spalten gleich sind oder wenn alle Elemente einer Zeile bzw. einer Spalte gleich 0 sind.
- Der Wert einer Determinante ist null, wenn mindestens eine Zeile bzw. Spalte eine Linearkombination einer oder mehrerer Zeilen bzw. Spalten ist.

Weitere Eigenschaften von Determinanten werden in Aufgabe 9.18 behandelt.

B **9.16** Berechne die Determinante der Matrix.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 5 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ABD **9.17** Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine Matrix in Dreiecksform.

1) Berechne die Determinante. Was fällt dir am Ergebnis auf?

2) Welche Vereinfachung kannst du beim Ermitteln von Determinanten von Matrizen in Dreiecksform treffen? Schreibe deine Überlegungen mit eigenen Worten nieder.

BCD **9.18** **1)** Berechne die Determinante der Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vertausche anschließend die erste mit der zweiten Spalte und berechne die Determinante der neuen Matrix A_2. Was fällt dir auf?

2) Multipliziere die erste Zeile der Matrix A_2 mit (–2) und berechne die Determinante der neuen Matrix A_3. Beschreibe, wie sich das Ergebnis dadurch verändert hat.

3) Addiere die dritte Zeile der Matrix A_3 zur ersten Zeile der Matrix A_3 und verändere die anderen Zeilen nicht. Berechne die Determinante der neuen Matrix A_4. Gibt es einen Unterschied zur Determinante von A_3? Wenn ja, welchen?

9.19 Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechne ihre Determinante.

B

Mathcad, TI-Nspire: www.verlaghpt.at

Lösung mit Excel 2010:

Die Berechnung der Determinante erfolgt über den Befehl **=MDET(**. Die Matrix kann als Zellbereich oder durch die Angabe der Zahlenwerte eingegeben werden.
ZB: **=MDET({–2.–1.1.0.1;–2.1.–2.1.0;1.1.–1.1.2;1.2.1.–2.–1;0.2.3.–3.2})**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		-2	-1	1	0	1				
2		-2	1	-2	1	0				
3	M=	1	1	-1	1	2		Det(M)=	20	=MDET(B1:F5)
4		1	2	1	-2	-1				
5		0	2	3	-3	2				

det(M) = 20

9.20 Verändere ein Element der ersten Zeile der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ so, dass ihre Determinante den Wert 2 annimmt. Beschreibe deine Vorgehensweise.

BC

Lösung mit TI-Nspire:

Da es zwei Spalten gibt, gibt es auch zwei Möglichkeiten, die Matrix zu verändern. Ich ersetze die Elemente $a_{11} = 3$ bzw. $a_{12} = 1$ der Matrix A durch x bzw. y.

```
1.1                *Nicht gespeicherte
a1:=[x 1; -1 2]                 [x 1; -1 2]
solve(det(a1)=2,x)                   x=1/2
a2:=[3 y; -1 2]                 [3 y; -1 2]
solve(det(a2)=2,y)                    y=-4
                                      4/99
```

Ich definiere zwei Matrizen **a1** und **a2** indem ich jeweils über Menü **7: Matrix und Vektor**, **1: Erstellen**, **1: Matrix...** die Anzahl der Zeilen und der Spalten eingebe und die Elemente der Matrix in die Vorlage einsetze. Nun können mithilfe des **solve**-Befehls die Werte für x und y ermittelt werden.

Die Matrizen lauten: $A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

9.21 ***1)*** Ermittle jeweils den Wert der folgenden Determinanten:

BD

$|1|$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$, ...

2) Stelle eine allgemeine Vermutung über die Werte von Determinanten analoger Bauart auf und überprüfe sie anhand der Determinante der (10 x 10)-Matrix.

9.22 Verändere das angegebene Element der Matrix so, dass die Determinante den Wert 10 annimmt.

BC

a) $A = \begin{pmatrix} 12 & -21 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$, a_{21} ***b)*** $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, b_{32} ***c)*** $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, c_{13}

9.23 Gib ohne zu rechnen an, ob die Determinante der gegebenen Matrix den Wert null hat. Begründe deine Entscheidung.

CD

1) $A = \begin{pmatrix} -11 & 3 & 22 \\ 4 & 13 & -8 \\ 5 & -4 & -10 \end{pmatrix}$ ***2)*** $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***3)*** $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -15 & -24 & -37 \\ 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$ ***4)*** $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

9.2.4 Invertieren von Matrizen

Für Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot 1 = a$ und $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1$

Man bezeichnet 1 als das **neutrale Element** bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{R}$ und den Kehrwert a^{-1} als das zu a **inverse Element** (latein: „inversio" = Umstellung) bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{R}$. Diese Überlegung kann auch auf das Rechnen mit Matrizen übertragen werden. Dem neutralen Element 1 entspricht dabei die Einheitsmatrix E. Das Berechnen einer inversen Matrix wird **Invertieren** genannt.

Eine Matrix A^{-1} ist die **inverse Matrix** zu einer quadratischen Matrix A mit $\det(A) \neq 0$, wenn das Produkt $A \cdot A^{-1}$ die Einheitsmatrix E ergibt, und es gilt: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

ZB: Es soll zur Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ermittelt werden.

Es gilt: $A \cdot A^{-1} = E$, also $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aus der Rechenregel zum Multiplizieren von Matrizen („Zeile mal Spalte") erhält man zwei lineare Gleichungssysteme, die nach den Variablen e und g bzw. f und h gelöst werden können:

$\text{I:}\quad 4 \cdot e + (-3) \cdot g = 1 \quad | \cdot 7$
$\text{II:}\quad 7 \cdot e + (-5) \cdot g = 0 \quad | \cdot 4$

und

$\text{III:}\quad 4 \cdot f + (-3) \cdot h = 0$
$\text{IV:}\quad 7 \cdot f + (-5) \cdot h = 1$

$\text{I*:}\quad 4 \cdot 7 \cdot e + (-3) \cdot 7 \cdot g = 7$
$\text{II*:}\quad 4 \cdot 7 \cdot e + 4 \cdot (-5) \cdot g = 0 \quad -$

- Eliminieren der Unbekannten e

$$\text{I* - II*:}\ (-3) \cdot 7 \cdot g - 4 \cdot (-5) \cdot g = 7$$
$$g \cdot ((-3) \cdot 7 - 4 \cdot (-5)) = 7$$
$$g = \frac{7}{(-3) \cdot 7 - 4 \cdot (-5)}$$
$$g = \frac{-7}{4 \cdot (-5) - (-3) \cdot 7} = \frac{-7}{1} = -7$$
$$\text{Allgemein:}\quad g = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-c)$$

- Durch Erweitern des Bruchs mit (−1) erkennt man, dass die Determinante von A im Nenner steht:
  $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - (-3) \cdot 7 = 1$

Bei der Ermittlung der übrigen Unbekannten wird analog vorgegangen. Die Lösungen lauten:

$e = \frac{1}{\det(A)} \cdot d = -5;\ f = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-b) = 3;\ h = \frac{1}{\det(A)} \cdot a = 4$

$$\Rightarrow\ A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} \cdot d & \frac{1}{\det(A)} \cdot (-b) \\ \frac{1}{\det(A)} \cdot (-c) & \frac{1}{\det(A)} \cdot a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Invertieren von (2 x 2)-Matrizen

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\det(A) \neq 0$

Bemerkung: Quadratische Matrizen können auch mithilfe des **Gauß-Jordan-Algorithmus** (Wilhelm Jordan, deutscher Geodät, 1842 – 1899) invertiert werden, auf den in diesem Band allerdings nicht eingegangen wird. Das Invertieren von quadratischen Matrizen höheren Grads ist oft sehr aufwändig und wird daher meist mithilfe von Technologieeinsatz durchgeführt.

BC TE

9.24 Berechne die Matrix B aus der Gleichung $A \cdot B = C$ mit

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -10 \end{pmatrix}$. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

Lösung mit TI-Nspire:

```
1.1   *Nicht gespeicherte
a:=[1 -2 0; 0 1 2; -1 0 -2]      [1 -2 0; 0 1 2; -1 0 -2]
c:=[8 -2 4; -1 1 6; -4 0 -10]    [8 -2 4; -1 1 6; -4 0 -10]
```

Ich definiere die beiden Matrizen **a** und **c** zum Beispiel mithilfe von ctrl menu, **8: Mathematische Vorlagen…** .

Die Gleichung lautet $A \cdot B = C$. Sie kann nach B gelöst werden, indem beide Seiten der Gleichung linksseitig mit A^{-1} multipliziert werden.

```
1.1   *Nicht gespeicherte
ai:=a^-1     [-1 -2 -2; -1 -1 -1; 1/2 1 1/2]
b:=ai·c      [2 0 4; -3 1 0; 1 0 3]
```

Ich ermittle die inverse Matrix **ai** mit **ai:=a^(-1)** und multipliziere die Gleichung auf beiden Seiten linksseitig mit **ai**:

$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot C$

Es gilt: $A^{-1} \cdot A = E$ und $E \cdot B = B$

Damit ergibt sich für die Matrix B:

$B = A^{-1} \cdot C$, also **b:=ai*c**.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgaben 9.25 – 9.26: Invertiere die angegebenen Matrizen und führe die Probe durch.

9.25 **a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ B

9.26 **a)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ B TE

Aufgaben 9.27 – 9.28: Berechne jeweils die Matrix M aus der gegebenen Gleichung.

9.27 **a)** $M \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$ B

9.28 **a)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 \\ 7 & 6 & 0 \\ 19 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $M \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 5 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 4 & -9 \\ -1 & -13 & 9 \\ -1 & -26 & 17 \end{pmatrix}$ B TE

9.29 Zeige, dass für die Elemente f und h der zur Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversen Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ gilt: $f = \frac{-b}{\det(A)}$ und $h = \frac{a}{\det(A)}$ BD

9.30 Für die zu einer (3 x 3)-Matrix A inverse Matrix A^{-1} gilt: BD

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} e \cdot i - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot i & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot i & a \cdot i - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{pmatrix}$$

1) Zeige diesen Zusammenhang für die Elemente der ersten Spalte von A^{-1} durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems (vergleiche Seite 248).

2) Überprüfe die Richtigkeit der Formel für eine beliebige Matrix deiner Wahl.

9.3 Anwendungen der Matrizenrechnung

9.3.1 Drehmatrix

ABCD **9.31** Das Wiener Riesenrad hat einen Durchmesser von d = 55,78 m.

1) Lege den Ursprung eines ebenen Koordinatensystems (x-Achse waagrecht) in den Mittelpunkt des Riesenrads und bestimme die Koordinaten des höchsten Punkts des Rads. Ermittle die Koordinaten, die dieser Punkt nach einer Drehung um 30°, 45° und 60° in mathematisch positiver Richtung hat.

2) Formuliere eine Rechenvorschrift, mit deren Hilfe man die Koordinaten für jeden beliebigen Drehwinkel φ berechnen kann.

Die Position von Punkten in einem Koordinatensystem kann durch Vektoren angegeben werden (vergleiche Abschnitt 8). Mithilfe der Matrizenrechnung ist es möglich, die Position von Punkten zu bestimmen, die durch **Drehungen** bzw. **Drehstreckungen** verändert wurden.

Ein Punkt Q(x|y) befindet sich in einem festen Abstand r zum Koordinatenursprung O. Dabei schließt OQ mit der x-Achse den Winkel α ein. Dreht man OQ um den Winkel φ in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn), erhält man den Punkt $Q'(x'|y')$.

Die Position von Q kann als Vektor angegeben werden:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \\ r \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für Q′ erhält man:

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha + \varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ y \cdot \cos(\varphi) + x \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Kehrt man den Rechenvorgang beim Multiplizieren von Matrizen um, erhält man

$$\overrightarrow{OQ'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$ Die Matrix D wird **Drehmatrix** genannt.

Die **Drehmatrix** $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ beschreibt die Drehung eines Punkts um den Ursprung O eines zweidimensionalen Koordinatensystems um einen Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn. Durch zusätzliches Multiplizieren mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ wird eine **Drehstreckung** beschrieben.

B **9.32** Bestimme die Koordinaten des Punkts P′, der durch Drehung des Punkts P um den Winkel φ um den Koordinatenursprung entsteht.

a) P(4|3), $\varphi = 45°$ ***b)*** P(6|8), $\varphi = -30°$ ***c)*** P(1,5|2), $\varphi = 60°$ ***d)*** P(5|2), $\varphi = 90°$

AB **9.33** Ein Dreieck ABC wird um den Winkel φ um den Koordinatenursprung gedreht. Berechne die Koordinaten der neuen Eckpunkte.

a) A(1|2), B(3|4), C(2|7), $\varphi = -135°$ ***b)*** A(1|1), B(4|6), C(−1|3), $\varphi = 30°$

AB **9.34** Eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in M ist mit einem festen Punkt O(0|0) durch eine Teleskopstange verbunden. Sie wird um den Winkel φ gedreht. Die Stange wird dabei um den Faktor k verlängert. Berechne die neuen Koordinaten des Mittelpunkts M′.

a) M(3|2), $\varphi = 25°$, k = 3 ***b)*** M(2|5), $\varphi = 35°$, k = 1,8

9.3.2 Planungsrechnung

Die Herstellung eines Endprodukts kann über verschiedene Zwischenprodukte erfolgen, deren Produktion die Bereitstellung verschiedener Rohstoffe erfordert.

ZB: Ein Kunde bestellt 140 Einheiten eines Endprodukts E1 sowie 230 Einheiten eines Endprodukts E2. Die Zusammensetzungen dieser Endprodukte aus den Zwischenprodukten Z1, Z2 und Z3 sowie die jeweilige Anzahl der dafür benötigten Rohstoffe R1 und R2 sind in zwei Tabellen beschrieben. In der ersten Tabelle wird die Zusammensetzung der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen, in der zweiten Tabelle die Zusammensetzung der Endprodukte aus den Zwischenprodukten angegeben.

	Z1	Z2	Z3
R1	5	7	9
R2	12	0	1

Matrix der Zwischenprodukte: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	E1	E2
Z1	0	3
Z2	2	4
Z3	8	1

Matrix der Endprodukte: $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

Um herauszufinden, wie viel von jedem Rohstoff für welches Endprodukt bestellt werden muss, ist es notwendig, diese beiden Matrizen miteinander zu multiplizieren. Man erhält somit die Matrix C der benötigten Rohstoffe für die Endprodukte E1 und E2 und kann die jeweils benötigte Anzahl der Rohstoffe aus einer daraus erstellten Tabelle ablesen.

Rohstoffmatrix der Endprodukte: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 & 52 \\ 8 & 37 \end{pmatrix} \Rightarrow$

	E1	E2
R1	86	52
R2	8	37

Zur Herstellung des Endprodukts E1 benötigt man also 86 Mengeneinheiten (ME) von R1 und 8 ME von R2. Für E2 benötigt man 52 ME von R1 und 37 ME von R2.

Um die nötigen Rohstoffmengen zur Herstellung von 140 Einheiten von E1 und 230 Einheiten von E2 zu ermitteln, wird ebenfalls die Matrizenmultiplikation verwendet:

$$\begin{pmatrix} 86 & 52 \\ 8 & 37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\,000 \\ 9\,630 \end{pmatrix}$$

Zur Herstellung von 140 Produkten E1 und 230 Produkten E2 benötigt man 24 000 Einheiten von R1 sowie 9 630 Einheiten von R2.

Um die Zusammenhänge einzelner Teilbereiche oder Teilprodukte in mehrstufigen Produktionsprozessen übersichtlich darstellen zu können, wird oft auch ein so genannter **Gozintograph** oder **Verflechtungsgraph** verwendet. Der Name „Gozintograph" stammt von Andrew Vazsonyi (ungarischer Mathematiker, 1916 – 2003), der seine Entwicklung des Gozintographen dem fiktiven italienischen Mathematiker „Zepartzat Gozinto" zuschrieb. Dessen Name stand für „the part that goes into", phonetisch: „ze part zat goz into".

Die mit 0 beschrifteten Pfeile können auch weggelassen werden.

ABC **9.35** Bei der Herstellung von Trockenfutter für Haustiere werden zuerst die Zutaten Z1, Z2, Z3 und Z4 zu drei verschiedenen Formen F1, F2 und F3 gepresst. Im zweiten Schritt werden diese Formen zu drei verschiedenen Mischungen M1, M2 und M3 vermengt. Die benötigten Mengenanteile sind aus den Tabellen ersichtlich.

	F1	F2	F3
Z1	40	12	23
Z2	53	19	72
Z3	42	16	85
Z4	80	113	0

	M1	M2	M3
F1	1	4	2
F2	3	0	1
F3	5	2	0

1) Erstelle mithilfe der Matrizenrechnung eine Tabelle, die den Zusammenhang zwischen den Zutaten und den Mischungen darstellt.
2) Fertige einen Gozintographen an.
3) Berechne, wie viele Mengenanteile von den Zutaten notwendig sind, um 450 Packungen von M1, 750 Packungen von M2 und 860 Packungen von M3 herzustellen.

ABC **9.36** Ein Ausstatter für Büromöbel hat vier Aktenschränke A1, A2, A3 und A4 in seinem Sortiment, für deren Zusammenbau die Bauelemente B1, B2, B3, B4 und B5 laut Tabelle „Tab1" in unterschiedlichen Mengen kombiniert werden. Eine Firma bestellt für vier Bürohäuser H1, H2, H3 und H4 jeweils unterschiedliche Mengen an Aktenschränken, die in der Tabelle „Tab2" festgehalten sind.

Tab1	A1	A2	A3	A4
B1	2	1	0	5
B2	1	4	2	4
B3	0	2	2	1
B4	3	1	2	0
B5	14	16	8	22

Tab2	H1	H2	H3	H4
A1	54	37	0	44
A2	26	35	6	16
A3	38	12	3	0
A4	12	0	8	10

1) Erstelle mithilfe der Matrizenrechnung eine Tabelle, die den Zusammenhang zwischen den Aktenschränken und den Bauelementen darstellt.
2) Fertige zu den Tabellen einen Gozintographen an.
3) Berechne die Gesamtkosten aller Aktenschränke. Verwende dazu die Werte aus der Tabelle „Tab3".

Tab3	B1	B2	B3	B4	B5
€ pro Stück	72,90	38,40	52,10	25,60	3,50

ABCD **9.37** Eine Großküche beliefert die Kantinen von vier Firmen F1, F2, F3 und F4 mit den Speisen „Pasta bolognese" (S1), „Faschierte Laibchen mit Röstgemüse und Paradeissalat" (S2) sowie „Nudelauflauf mit Röstgemüse" (S3). Für diese Speisen benötigt man unter anderem folgende Zutaten: Nudeln (Z1), Röstgemüse (Z2), Faschiertes (Z3) und Paradeiser (Z4)
1) Recherchiere, welche Mengen von welchen Zutaten für das Zubereiten der Speisen pro Portion benötigt werden und fertige eine Tabelle an.
2) Berechne, wie viel von den jeweiligen Zutaten verarbeitet werden muss, wenn F1 für 35 Mitarbeiter, F2 für 78 Mitarbeiter, F3 für 9 Mitarbeiter und F4 für 53 Mitarbeiter Speisen bestellt. Wähle dabei selbst, welche und wie viele Portionen der jeweiligen Speisen die Firmen bestellen. Erstelle eine Tabelle und fertige einen Gozintographen an.

ABCD **9.38** Erstellt in Partnerarbeit eine Aufgabe zu nebenstehendem Gozintographen. Wählt dazu eigene Zahlenwerte und ermittelt das Ergebnis. Präsentiert eure Aufgabe der ganzen Klasse.

9.3.3 Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

Mithilfe der Matrizenschreibweise lassen sich lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Gleichungen nach dem gleichen Schema lösen, zB:

I: $3x + 5y = 7$
II: $2x + 4y = 6$

Dieses Gleichungssystem kann auch mithilfe der **Koeffizientenmatrix** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, des Variablenvektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$, der die Ergebnisspalte angibt, angeschrieben und durch Multiplikation mit der inversen Matrix A^{-1} gelöst werden:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1, y = 2$$

- Linksseitige Multiplikation der Gleichung mit der zu A inversen Matrix A^{-1}
  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} \cdot A = E \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Die **Lösung eines linearen Gleichungssystems** aus n Gleichungen mit n Unbekannten kann mit $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ berechnet werden (A ... Koeffizientenmatrix, $\vec{b}$ ... Vektor der Konstanten).
Ein Gleichungssystem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn für die Determinante der Koeffizientenmatrix A gilt: $\det(A) \neq 0$

Bemerkung: Die Bedingung $\det(A) \neq 0$ für die Determinante der Koeffizientenmatrix wurde in Band 1, Abschnitt 6.2 hergeleitet.

9.39 Schreibe die Gleichung als lineares Gleichungssystem an und löse es mithilfe der Matrizenrechnung. B

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -36 \end{pmatrix}$

9.40 Löse das Gleichungssystem mithilfe der Matrizenrechnung. B TE

a) I: $5c - 4d = 18$
II: $7c + 2d = 10$

b) I: $2x + 3y = -7$
II: $4y + 3z = 8$
III: $x + y + z = 1$

c) I: $3y + 4z = 16$
II: $2x + y - 2z = 8$
III: $8x - 3y = 12$

9.41 In der letzten Saison hat der FC Prihoška 44 Pflichtspiele absolviert. Die Anzahl der Spiele, die die Mannschaft nicht verloren hat, ist dreimal größer als die Anzahl der Niederlagen. Zudem hat sie um 14 Siege mehr als Niederlagen erzielt. Berechne die Anzahl der Siege, die der Unentschieden und die der Niederlagen des Vereins in dieser Saison. Stelle dazu ein Gleichungssystem auf und löse es mithilfe der Matrizenrechnung. AB

9.42 Ermittle die Lösung mithilfe von Technologieeinsatz durch Verwendung der Matrizenrechnung oder begründe, warum das nicht möglich ist. BD TE

a) I: $-2k + 3\ell - 8m + n = -14$
II: $3k - \ell - 5m + 3n = 5$
III: $4k - 6\ell + 16m - n = 13$
IV: $5\ell + 13m + 7n = -4$

b) I: $3a - 3b - 3c + 5d = 23$
II: $a + 4b + 4c - d = 10$
III: $-2a - 2b - 2c + d = 16$
IV: $4a + b + c - 5d = -8$

Matrizen und Determinanten

Zusammenfassung

(m x n)-Matrix
m Zeilen, n Spalten
a_{ij} ... Elemente der Matrix mit i = 1 ... m, j = 1 ... n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die **Addition** und **Subtraktion** zweier (m x n)-Matrizen und die **Multiplikation** einer Matrix **mit einem Skalar** erfolgen komponentenweise.

Matrizenmultiplikation: Man bildet jeweils das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors einer (m x n)-Matrix mit dem j-ten Spaltenvektor einer (n x r)-Matrix und erhält dadurch eine (m x r)-Matrix – „**Zeile mal Spalte**".

Inverse Matrix A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Invertieren einer (2 x 2)-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Anwendungen der Matrizenrechnung:
Drehmatrix, Planungsrechnung, lineare Gleichungssysteme

Weitere Aufgaben

B **9.43** Gegeben sind die Matrizen A, B und C. Berechne die Matrix D.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $D = A + B - C$
b) $D = B^T - 3 \cdot (A + C)$
c) $D = 2 \cdot A - B + C$
d) $D = (A - B)^T + 2 \cdot C$
e) $D = 0{,}5 \cdot (A - C) + B$
f) $D = (A + C)^T - 3 \cdot B^T$

Aufgaben 9.44 – 9.45: Bestimme jeweils die Determinante der Matrix.

B **9.44** **a)** $L = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $F = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B **9.45** **a)** $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ -5 & 9 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $Z = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -2 & 12 \\ 8 & 11 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

TE

B **9.46** Löse das lineare Gleichungssystem mithilfe der Matrizenrechnung.

a) I: $3a - 4b = 140$
II: $5a - 3b = 138$

b) I: $-3x + 2y - z = -31$
II: $y + z = -5$
III: $5x - 4y = 50$

TE

AB **9.47** Die Gärtnerei Zwarch & Zwibel soll in einer Parkanlage zwei gleich große Beete bepflanzen. Am ersten Tag arbeitet Gärtnerin Zwarch insgesamt 6 Stunden am ersten Beet, Gärtner Zwibel verspätet sich und kann daher um 3 Stunden weniger als Zwarch am Beet arbeiten. Das erste Beet wird an diesem Tag fertig. Am nächsten Tag arbeitet Zwarch am Vormittag alleine 4 Stunden, Zwibel arbeitet am Nachmittag alleine für 3 Stunden. Am Ende dieses Tags ist nur die Hälfte des zweiten Beets fertig. Berechne, wie lang jede der Personen für das Bepflanzen eines Blumenbeets alleine brauchen würde. Wie lang würden sie brauchen, wenn beide gleichzeitig an einem Beet arbeiten würden? Stelle das Gleichungssystem auf und löse es mithilfe der Matrizenrechnung.

9.48 Ein Roboter soll für die maschinelle Herstellung von Abdeckplatten programmiert werden. Er soll in der Ebene von einem Ausgangspunkt P aus einen Schnittbogen so ausführen, dass dabei ein Winkel φ in mathematisch positiver Richtung überstrichen wird und der Schnittradius um den Faktor k gleichmäßig verändert wird. Ermittle die zur Programmierung des Roboters notwendige Drehmatrix und bestimme den Endpunkt P′ des Schnittvorgangs.

AB

a) $P(1|1)$, $\varphi = 65°$, $k = 2$ **b)** $P(5|8)$, $\varphi = -25°$, $k = 1{,}5$

9.49 Der Schwerpunkt eines Körpers hat in einem dreidimensionalen Koordinatensystem die Koordinaten $S(3|2|4)$. Bestimme seine neuen Koordinaten mithilfe der Drehmatrix

AB

$D_z = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, die eine Drehung um den Winkel φ um die z-Achse beschreibt.

a) $\varphi = 30°$ **b)** $\varphi = 60°$ **c)** $\varphi = 120°$

9.50 Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts werden in der ersten Produktionsstufe aus den Einzelteilen T1, T2, T3 und T4 die Baugruppen B1, B2 und B3 hergestellt. Im zweiten Schritt werden aus den Baugruppen drei verschiedene Endprodukte E1, E2 und E3 gefertigt. Die benötigten Mengen sind aus den Tabellen ersichtlich.
Die Materialkosten pro Einheit betragen:
3,00 € für T1; 2,50 € für T2; 1,00 € für T3 und 5,00 € für T4

ABC TE

	B1	B2	B3
T1	2	1	0
T2	3	0	5
T3	1	4	1
T4	2	0	3

	E1	E2	E3
B1	1	4	2
B2	3	0	1
B3	5	2	0

1) Fertige einen Gozintographen an, der die Produktion beschreibt.
2) Erstelle mithilfe der Matrizenrechnung eine Tabelle, die den Zusammenhang zwischen den Einzelteilen und den Endprodukten darstellt.
3) Berechne, wie viele Einzelteile notwendig sind, um 40 Stück von E1, 70 Stück von E2 und 50 Stück von E3 zu produzieren. Berechne die dafür anfallenden Materialkosten.

9.51 Ein Tischlereibetrieb stellt vier verschiedene Bettenmodelle B1, B2, B3 und B4 für drei unterschiedliche Möbelhäuser M1, M2 und M3 her. Zusätzlich werden drei verschiedene Holztypen H1, H2 und H3 pro Modell verarbeitet.
Die Tabelle „Fm“ gibt an, wie viel Festmeter einer Holzsorte für einen bestimmten Bettentyp verwendet werden. In der Tabelle „Anzahl“ steht die Anzahl der bestellten Stück für jedes Möbelhaus. Außerdem sind in der Tabelle „Kosten“ die Kosten pro Festmeter der Holztypen angegeben.

ABC TE

Fm	H1	H2	H3
B1	0,05	0,15	0,1
B2	0,2	0	0,1
B3	0,1	0,2	0,01
B4	0,2	0,1	0

Anzahl	M1	M2	M3
B1	4	5	0
B2	2	1	6
B3	0	8	3
B4	4	6	5

Kosten	H1	H2	H3
Kosten pro Fm	53,50 €	61,20 €	48,90 €

1) Fertige einen Gozintographen für die Herstellung und die Lieferung an die Möbelhäuser an.
2) Berechne die gesamten Materialkosten für alle hergestellten Modelle.

ABC **9.52** In einer Fabrik werden zwei Typen von Hebebühnen H1 und H2 mit drei Steuerelementen E1, E2 und E3 hergestellt. Zur Fertigung dieser Steuerelemente benötigt man zwei verschiedene Pneumatikzylinder P1 und P2. Der nebenstehende Gozintograph gibt an, wie viele Steuereinheiten für die Herstellung von jeweils einer Hebebühne und wie viele Pneumatikzylinder für die Herstellung von jeweils einer Steuereinheit benötigt werden.

1) Berechne, wie viele Pneumatikzylinder P1 bzw. P2 für die Herstellung von 15 Hebebühnen H1 und 12 Hebebühnen H2 benötigt werden.

2) Im Lager der Fabrik befinden sich noch jeweils 40 Pneumatikzylinder P1 und P2. Wie viele Hebebühnen können damit hergestellt werden und wie viele Steuereinheiten können mit den restlichen Zylindern noch gefertigt werden?

AB **9.53** Ein Vertrieb beliefert jeweils drei Filialen eines Modehauses F1, F2 und F3 in Graz, Salzburg und Wien mit den Markenjeans „Sivel“, „Pengler“ und „Petrol“. In der Tabelle „Lieferungen“ ist die Anzahl der Lieferungen an jede Filiale eingetragen. In „Gelieferte Stück“ ist die Gesamtanzahl der jeweiligen Jeansmarke für jede Stadt eingetragen. Berechne, wie viele Stück jeder Marke in jede Filiale geliefert werden.

Lieferungen	F1	F2	F3
Graz	6	5	2
Salzburg	10	14	8
Wien	8	3	5

Gelieferte Stück	Sivel	Pengler	Petrol
Graz	165	201	132
Salzburg	424	462	338
Wien	236	234	196

BC **9.54** Die Spiegelung P′ eines Punkts P an einer Geraden g, die durch den Ursprung eines zweidimensionalen Koordinatensystems verläuft, ist durch die Multiplikation der **Spiegelungsmatrix**

$S = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$ mit dem Ortsvektor von P wie folgt definiert:

$$\overrightarrow{OP'} = S \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

Der Winkel φ ist dabei jener Winkel, den die Gerade g mit der waagrechten Achse des Koordinatensystems einschließt.

Spiegle den Punkt P an der Geraden g. Überprüfe das Ergebnis mithilfe einer Zeichnung.

a) $P(6|2)$, $\varphi = 20°$

b) $P(2|2)$, g: $y = \frac{1}{2} \cdot x$

c) $P(3|5)$, g ist die 1. Mediane

d) $P(-1|1)$, g: $y = -3x$

ABCD **9.55** **1)** Zeige mithilfe der Vektorrechnung, dass die Punkte $A(-2|1)$, $B(3|-1)$, $C(5|4)$ und $D(0|6)$ ein Quadrat bilden.

2) Drehe das Quadrat um den Winkel $\alpha = 70°$ in mathematisch positive Richtung um den Koordinatenursprung. Gib die Koordinaten der Punkte des gedrehten Quadrats an.

3) Spiegle das gedrehte Quadrat an der 1. Mediane und gib die Koordinaten der neuen Punkte an. Verwende dazu Aufgabe 9.54.

Wissens-Check

		gelöst
1	Gib den Wert des angegebenen Elements bzw. die Position des angegebenen Werts an. $M = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ A) $m_{13} = ?$ B) $m_{22} = ?$ C) $m_{32} = ?$ D) $? = 4$ E) $? = 7$	
2	Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Matrizen A und B, wenn Folgendes gilt? $A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
3	Gib an, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Stelle die falschen Aussagen richtig. A) Beim Transponieren einer Matrix werden ihre Zeilen und Spalten vertauscht. B) Das Multiplizieren zweier Matrizen erfolgt komponentenweise. C) Man kann zu jeder (m x n)-Matrix die Determinante berechnen. D) Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ. E) Man kann Matrizen verwenden, um eine Drehung zu beschreiben. F) Multipliziert man eine Matrix A mit der zu ihr inversen Matrix A^{-1}, erhält man die transponierte Matrix A^T.	
4	Sind beide Rechnungen durchführbar? Begründe deine Antwort und führe die Rechnungen gegebenenfalls aus. A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	
5	Gib ohne die Variablen zu berechnen an, ob das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat oder nicht. Begründe deine Entscheidung. A) I: $a - b + c = -19$ II: $3a + 7b - 12c = 458$ III: $17a - 3b + 8c = 122$ B) I: $2x + 3y - 2z = -9$ II: $x + 3y + 2z = 4$ III: $-4x - 6y + 4z = 15$	
6	Ich kann zu einer produktionstechnischen Aufgabenstellung einen Gozintographen erstellen.	
7	Erkläre die einzelnen Teile der Formel $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ zum Lösen eines linearen Gleichungssystems.	

Lösung:
1) A) 0, B) −1, C) nicht möglich, D) m_{24}, E) m_{13} 2) A und B sind zueinander invers ($B = A^{-1}$).
3) A) richtig; B) falsch, „Zeile mal Spalte“; C) Falsch, man kann nur die Determinanten von quadratischen Matrizen berechnen; D) richtig; E) richtig; F) falsch, $A \cdot A^{-1} = E$
4) A) ist durchführbar, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$. B) ist nicht durchführbar. Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix muss gleich groß sein wie die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix.
5) A) hat eine eindeutige Lösung, die Determinante der Koeffizientenmatrix hat den Wert 120. Bei B) ist die dritte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Linearkombination der ersten Zeile, die Determinante hat den Wert 0. Eine eindeutige Lösung ist nicht möglich. 6) siehe Seite 251 7) siehe Seite 253

10 Statistik

Im Allgemeinen haftet der Mathematik der Nimbus der untadeligen Korrektheit an. Wenn es aber um das Thema Statistik geht, ist der gute Ruf dahin. Wir kennen die Grafiken, die bewusst einen falschen Eindruck vermitteln, Prognosen vor Wahlen, die weit daneben gelegen sind, und Sprüche wie „Trau keiner Statistik, die du nicht selbst gefälscht hast!". Dieses Misstrauen ist wohl darauf zurückzuführen, dass statistische Methoden sehr oft nicht korrekt angewandt werden bzw. aus Zahlenwerten falsche Schlüsse gezogen werden.

Der Begriff **Statistik** (latein: „status" = Stand, Umstand) umfasst alle Methoden der Erfassung und Auswertung von Daten. Ziel der **beschreibenden Statistik** ist neben dem Erfassen und Veranschaulichen von Daten deren Auswertung mithilfe von Kennzahlen, die möglichst viel Information über die Originaldaten in einigen wenigen Zahlen zum Ausdruck bringen sollen.

10.1 Beschreibende Statistik

10.1.1 Grundbegriffe der statistischen Erhebung – Darstellung von Daten

Wie in vielen Fachgebieten wurde auch in der Statistik eine Fachsprache entwickelt. Sie soll sicherstellen, dass mit bestimmten Begriffen auch exakt die gleichen Bedeutungen verbunden bzw. Verwechslungen mit Begriffen der Alltagssprache vermieden werden.

AB **10.1** Ein Klassenraum einer Schule soll neu ausgemalt werden. Jede Schülerin bzw. jeder Schüler kann sich für eine der Farben gelb, hellgrün, hellblau oder weiß entscheiden. Jener Vorschlag, der die meisten Stimmen erhält, gilt als angenommen.
Überlegt, wie man die Daten erhebt und die Auswertung durchführt und führt sie in eurer Klasse durch.

Untersucht man zum Beispiel, wie viele Personen pro Haushalt in Österreich gemeldet sind, so nennt man die Objekte der Untersuchung – also die österreichischen Haushalte – die **Erhebungseinheiten**. Die Gesamtheit aller Erhebungseinheiten bildet die **Grundgesamtheit**. Aus praktischen Gründen kann man aber oft nur auf eine Auswahl, die **Stichprobe**, zurückgreifen. Die Eigenschaft, die man untersucht, nennt man **Merkmal**, deren möglichen Werte die **Merkmalsausprägungen**.

In obigem Beispiel ist also die Anzahl der im Haushalt lebenden Personen das Merkmal, die Merkmalsausprägungen sind die Werte 1, 2, 3 … .

In der folgenden Tabelle werden einige Beispiele für die oben angeführten Begriffe genannt.

Grundgesamtheit	Merkmal	Merkmalsausprägungen
Österreichische Haushalte	Personenanzahl	1, 2, 3, 4 …
Schülerinnen und Schüler einer HTL	Note in Mathematik	1, 2, 3, 4, 5
Würfe mit einer Münze	Seite	Zahl, Wappen
Angemeldete PKWs in Österreich	Antriebsart	Benzinmotor, Dieselmotor, anderer Antrieb

Die Möglichkeiten, Daten auszuwerten, hängen von deren Art ab. Man kann zum Beispiel die durchschnittliche Anzahl der in einem österreichischen Haushalt lebenden Personen errechnen, diesen Vorgang aber nicht sinnvoll auf die Merkmalsausprägungen Benzinmotor und Dieselmotor der PKWs übertragen. Man unterscheidet daher verschiedene Merkmalsarten:

- **Metrische** oder **quantitative Merkmale** sind zähl- oder messbar. Das Bilden von Differenzen ist sinnvoll.
  Zum Beispiel ist die Differenz zwischen einem 4-Personen-Haushalt und einem 5-Personen-Haushalt ebenso groß wie die Differenz zwischen einem 3-Personen-Haushalt und einem 4-Personen-Haushalt.
- **Ordinale Merkmale** oder **Rangmerkmale** sind Merkmale, deren Merkmalsausprägungen eine natürliche Reihenfolge haben.
  Am Beispiel von Schulnoten erkennt man, dass das Bilden von Differenzen hier nicht sinnvoll ist. Die Rangordnung (besser – schlechter) ist vorgegeben, der Unterschied zwischen den Noten 1 und 2 ist aber nicht unmittelbar mit dem zwischen den Noten 4 und 5 vergleichbar.
- **Nominale** oder **qualitative Merkmale** sind Merkmale, deren Merkmalsausprägungen keinerlei Vergleichbarkeit oder Reihenfolge zulassen, die also nur Namen (latein: „nomen" = Name) sind.
  ZB: Antriebsart, Energieträger, Augenfarbe, Geschlecht, Religionszugehörigkeit ... .

Bemerkung: Mit den Formulierungen „durchschnittlich" bzw. „im Mittel" meint man oft das arithmetische Mittel, das schon aus Band 1 bekannt ist. Wir werden aber auch noch andere Mittelwerte kennenlernen. Wo Verwechslungen möglich sind, ist die Formulierung „durchschnittlich" daher zu vermeiden.

Eine weitere für die Verarbeitung der Daten relevante Überlegung ist die Unterscheidung zwischen **diskreten** und **stetigen Merkmalen**. Können die Merkmalsausprägungen nur bestimmte Werte annehmen, zum Beispiel ganze Zahlen, so spricht man von diskreten Merkmalen. Als stetig werden Merkmale bezeichnet, die in einem gewissen Bereich jeden beliebigen Wert annehmen können, zum Beispiel die Körpergröße von Schülerinnen und Schülern.

10.2 Gib jeweils an, ob es sich um ein metrisches, ordinales oder nominales Merkmal handelt. C

1) Güteklassen von Äpfeln
2) Religionszugehörigkeiten von Personen
3) Inflationsraten verschiedener Länder
4) erzielte Weiten beim Kugelstoßen

10.3 Gib an, ob das Merkmal diskret oder stetig ist. Begründe deine Entscheidung. CD

1) Klassenschülerzahl
2) Masse von Hühnereiern
3) Verspätungen im Zugverkehr
4) Anzahl der PKWs pro Haushalt

10.4 Vervollständige die Tabelle mit eigenen Beispielen. Wenn es sich um ein metrisches Merkmal handelt, unterscheide zusätzlich zwischen stetig und diskret. C

Grundgesamtheit	Merkmal	Merkmalsart	stetig/diskret
Arbeitnehmer/innen			
	Farbe		
		ordinal	
			stetig

10.1.2 Tabellarische Darstellung und Häufigkeitsverteilung

Bei Erhebungen fallen Daten oft in ungeordneter und damit unübersichtlicher Form an. Aus dieser so genannten **Urliste** kann zum Beispiel durch Tabellieren eine **Strichliste** erzeugt werden. Die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Merkmalsausprägungen kann dann abgelesen werden. Man unterscheidet:

- Die **absolute Häufigkeit h_i** gibt an, wie oft eine bestimmte Merkmalsausprägung vorkommt. Die Summe der absoluten Häufigkeiten muss gleich dem Umfang n der Stichprobe bzw. der Grundgesamtheit sein.
  ZB: Von 100 untersuchten Personen haben 40 die Blutgruppe A, 15 die Blutgruppe B ...
  Daher sind die absoluten Häufigkeiten: $h_1 = 40$, $h_2 = 15$ ...
- Die **relative Häufigkeit r_i** gibt den Anteil einer bestimmten Merkmalsausprägung an. Bis auf Rundungsfehler ergibt die Summe der relativen Häufigkeiten 1.
  $r_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}} = \frac{h_i}{n}$
  Wird die relative Häufigkeit in Prozent angegeben, nennt man sie **prozentuelle Häufigkeit p_i**.

Zur grafischen Veranschaulichung von Häufigkeiten werden oft **Säulendiagramme** oder **Balkendiagramme** verwendet. Die Merkmalsausprägungen werden auf der waagrechten Achse aufgetragen, darüber Säulen, deren Höhe jeweils der Häufigkeit entspricht (absolut oder in Prozent).

ZB: Erfasst man die Anzahl der Geschwister, die die 25 Schülerinnen und Schüler einer 2. Klasse haben, so kann folgende Urliste entstehen:
1, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 1

Merkmals-ausprägung	Strichliste	absolute Häufigkeit h_i	relative Häufigkeit r_i	prozentuelle Häufigkeit p_i
0	𝍸 |||	8	0,32	32 %
1	𝍸 𝍸 ||	12	0,48	48 %
2	|||	3	0,12	12 %
3	||	2	0,08	8 %
Summe		25	1	100 %

Wird die Häufigkeitsverteilung eines nominalen Merkmals mithilfe eines Säulendiagramms dargestellt, werden die Säulen oft nach fallenden Häufigkeiten geordnet. Diese Anordnung nennt man **Pareto-Diagramm** (benannt nach dem italienischen Ingenieur, Ökonomen und Soziologen Vilfredo Pareto, 1848 – 1923). Sie ist vor allem in der Fehleranalyse gebräuchlich und liefert rasch einen guten Überblick über die wichtigsten Einflussgrößen.

ZB: Ein Versandhaus registriert bei zurückgeschickten Waren den Grund der Rücksendung.

Rücksendegrund	absolute Häufigkeit
Modell gefällt nicht	45
Material gefällt nicht	37
zu groß	81
zu klein	127
andere Gründe	23

Bei quantitativen Merkmalen und Rangmerkmalen sind auch die **Häufigkeitssummen** aussagekräftig. Dabei werden jeweils die prozentuellen Häufigkeiten bis zu einer bestimmten Merkmalsausprägung aufsummiert. Die grafische Darstellung zeigt einen treppenförmigen Verlauf.

ZB: In einer Textilfabrik werden Stoffballen auf die Anzahl von Webfehlern hin untersucht. Sie werden in einer Häufigkeitstabelle erfasst, die um eine Spalte mit den aufsummierten Häufigkeiten ergänzt wird.

Fehleranzahl	h_i	r_i	p_i	Häufigkeitssumme (in Prozent)
0	16	0,08	8 %	8 %
1	22	0,11	11 %	19 %
2	32	0,16	16 %	35 %
3	52	0,26	26 %	61 %
4	44	0,22	22 %	83 %
5	34	0,17	17 %	100 %
Summe	200	1	100 %	

Häufigkeitssumme in Prozent
100
80
60
40
20
0
0 1 2 3 4 5
Fehleranzahl

Aus der letzten Spalte kann man nun ablesen:
8 % der Stoffballen sind fehlerlos.
19 % der Stoffballen haben 0 oder 1 Fehler, also höchstens 1 Fehler.
35 % der Stoffballen haben 0, 1 oder 2 Fehler, also höchstens 2 Fehler, usw.

10.5 Die Höhen von 15 gleich alten Kastanienbäumen, die unter genau festgelegten Bedingungen gepflanzt wurden, sind in folgender Urliste angegeben (Werte in Meter):
10,6 9,8 10,6 11,2 12,5 9,8 9,8 10,3 8,7 10,3 11,2 11,2 10,6 9,8 11,8
Berechne die absoluten, relativen und prozentuellen Häufigkeiten. B

10.6 In einer Gemeinde wurde die Anzahl der TV-Geräte pro Haushalt erhoben: BC

Anzahl der TV-Geräte	0	1	2	3	4
Anzahl der Haushalte	14	203	135	51	18

1) In wie vielen Haushalten gibt es höchstens ein Fernsehgerät?
2) Berechne die relativen und prozentuellen Häufigkeiten.
3) Erstelle ein Säulendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten.

10.7 Anlässlich einer Erhebung der Verkehrsbetriebe wurden 1 500 Personen befragt, an wie vielen Tagen der vergangenen Woche sie ein öffentliches Verkehrsmittel benutzt hatten. BC

Tage	0	1	2	3	4	5	6	7
Personen	220	185	96	124	178	412	208	77

1) Wie viele Personen haben nie, wie viele an 2 Tagen und wie viele an mindestens 6 Tagen öffentliche Verkehrsmittel benutzt?
2) Berechne die relativen Häufigkeiten und die Häufigkeitssummen.
3) Erstelle je ein Diagramm mit den absoluten Häufigkeiten und den Häufigkeitssummen.
4) Lies aus dem Diagramm der Häufigkeitssummen ab, wie viel Prozent der befragten Personen an höchstens fünf Tagen mit den „Öffis" gefahren sind.

10.8 Die erste Nationalratswahl der 2. Republik in Österreich fand am 25. November 1945 statt und ergab folgende Stimmenverteilung: B

ÖVP	SPÖ	KPÖ	Sonstige
1 602 227	1 434 898	174 257	5 972

Ermittle die relativen Häufigkeiten in Prozent und erstelle ein Säulendiagramm.

TI-Nspire, GeoGebra: www.verlaghpt.at

Technologieeinsatz: Beschreibende Statistik

Sehr viele in der Statistik gebräuchliche Funktionen sind in Tabellenkalkulationsprogrammen bereits vordefiniert.

Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)

Sind die Werte einer Urliste bereits als Daten erfasst, so kann man deren absolute Häufigkeiten mithilfe des Befehls **HÄUFIGKEIT** ermitteln.

ZB: Von einer gegebenen Urliste (Anzahl der Geschwister, vergleiche Seite 260) sollen die absoluten und relativen Häufigkeiten ermittelt und anschließend ein Säulendiagramm erstellt werden.

Urliste: 1, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 3, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 1

- In der ersten Spalte werden die Daten der Urliste eingetragen. Da die Merkmalsausprägungen 0, 1, 2 und 3 vorkommen, werden diese in die zweite Spalte eingetragen.
- Um die absolute Häufigkeit jeder Merkmalsausprägung zu ermitteln, werden zuerst die Zellen neben den Ausprägungen markiert. Das ist notwendig, da die Funktion **HÄUFIGKEIT** eine Matrixfunktion ist, also eine Funktion, die mehrere Werte in die vorgesehenen Zellen ausgibt. Die Funktion **HÄUFIGKEIT** wird aus der Kategorie **Statistik** gewählt.

- Der Funktionsassistent bietet nun eine Eingabemaske an.
- Im Feld **Daten** werden die Werte der Urliste eingetragen. Dazu kann auch der Bereich (hier **A3:A27**) markiert werden.
- Im Feld **Klassen** werden die Merkmalsausprägungen eingegeben, also der Bereich **B3:B6** markiert.
- Die gesuchten Häufigkeiten erscheinen als Liste in der Eingabemaske.

	A	B	C
1	Anzahl der Geschwister		
2	Urliste	Merkmals-ausprägung	absolute Häufigkeit
3	1	0	8
4	0	1	12
5	0	2	3
6	2	3	2
7	1		

- Das Übertragen dieser Werte in die zuvor markierten Zellen erfolgt mit der Tastenkombination Strg + Shift + Enter. Beachte: Das Drücken von **OK** oder Betätigen der Enter-Taste alleine hätte zur Folge, dass nur der erste Wert angezeigt wird.

	A	B	C	D
1	Anzahl der Geschwister			
2	Urliste	Merkmals-ausprägung	absolute Häufigkeit	
3	1	0	8	
4	0	1	12	
5	0	2	3	
6	2	3	2	
7	1		=SUMME(C3:C6)	
8	0		SUMME(Zahl1; [Zahl2]; ...)	

- Um für die weiteren Berechnungen die Gesamtzahl der erfassten Werte in einer Zelle zur Verfügung zu haben, bildet man die Summe der absoluten Häufigkeiten.

absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
8	=C3/C7
12	
3	
2	
25	

- Bei der Formel für die relative Häufigkeit muss die Zelle, in der die Gesamtanzahl der Werte steht, durch das **$**-Zeichen als absolute Adresse gekennzeichnet werden. Danach wird die Formel in die Zellen darunter kopiert.

absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	prozentuelle Häufigkeit
8	0,32	32,00%
12	0,48	48,00%
3	0,12	12,00%
2	0,08	8,00%
25		

- Die gleichen Werte werden in die nächste Spalte übertragen und mithilfe der Formatangabe als Prozentangaben dargestellt.

- Das Säulendiagramm wird über **Einfügen – Diagramme – Säule** erstellt.
- Die Achsen- und Datenbeschriftung erfolgt über die **Diagrammtools**.

Sollen Buchstaben oder Wörter abgezählt werden, verwendet man den Befehl **ZÄHLENWENN** statt des Befehls **HÄUFIGKEIT**.

10.9 Die Häufigkeiten der Blutgruppen sind in verschiedenen Regionen unterschiedlich verteilt. Im nebenstehenden Diagramm ist die Verteilung der Blutgruppen inklusive Rhesusfaktor für Österreich abgebildet.

BCD TE

a) Welche Blutgruppe kommt in Österreich am häufigsten vor?

b) Frage mindestens 30 Personen nach ihrer Blutgruppe. Ermittle aus den Daten die absoluten und relativen Häufigkeiten und erstelle ein Säulendiagramm mit den prozentuellen Häufigkeiten. Präsentiere dein Ergebnis und vergleiche es mit dem angegebenen Diagramm.

10.1.3 Klassenbildung

Bisher haben wir uns mit der Verteilung der Häufigkeiten jeder in einer Erhebung auftretenden Merkmalsausprägung befasst. Dies ist jedoch nicht immer sinnvoll, zum Beispiel, wenn die Anzahl der Merkmalsausprägungen sehr groß ist, bzw. nicht möglich, wenn es sich um ein stetiges Merkmal handelt. In diesem Fall bilden wir Intervalle, so genannte **Klassen**. Man spricht dann von klassifizierten Daten. Die **Klasseneinteilung** wird im Allgemeinen nach folgenden Richtlinien getroffen:

- Als Richtwert für die Anzahl der Klassen geht man oft von $\sqrt{n}$ (n ... Anzahl der Daten) aus, mehr als 20 Klassen sind jedoch unüblich.
- Die Klassen sollten nach Möglichkeit **gleich breit** sein.
- Die Klassengrenzen sollten, wenn möglich, einfache Zahlen sein; bei gerundeten Daten sollten sie mit den Rundungsgrenzen zusammenfallen.
- Zur grafischen Darstellung verwendet man ein **Histogramm**. Dabei werden Rechtecke verwendet, deren Höhe jeweils der Klassenhäufigkeit entspricht, falls alle Klassen gleich breit sind. Andernfalls sollten die Rechtecksflächen den jeweiligen Häufigkeiten entsprechen.

AB TE **10.10** In einer HTL wurden 92 Schülerinnen und Schüler der 2. Jahrgänge gewogen (Werte in kg):
47,6 50,1 50,6 51,3 52,4 51,9 52,5 52,8 54,5 55,2 57,3 58,2 58,5 58,5 58,9 59,3 59,4 59,5 59,6 59,7 60,2 60,3 60,4 60,5 60,6 60,7 60,8 60,9 61,3 61,5 61,5 61,5 61,7 61,9 62,4 62,8 63,2 63,5 64,4 64,7 65,4 65,4 65,8 65,9 66,0 66,2 66,7 67,3 67,3 67,4 67,5 68,2 68,2 68,3 69,1 69,2 69,3 69,5 69,5 69,7 69,8 70,0 72,3 72,4 74,0 74,1 75,4 75,4 75,6 75,7 75,7 76,1 77,1 78,4 78,5 78,9 79,6 79,7 80,1 82,0 82,9 83,2 83,5 85,8 87,1 88,5 89,4 91,0 94,2 95,6 100,8 101,2

1) Bilde eine Klasseneinteilung.

2) Erstelle eine Häufigkeitstabelle mit absoluten, relativen und prozentuellen Häufigkeiten sowie Häufigkeitssummen in Prozent und veranschauliche sie in einem Histogramm.

Lösung:

1) 92 Werte $\Rightarrow$ 9 oder 10 Klassen, wir wählen 9 Klassen.
Klassenbreite:
Max.: 101,2 kg; Min.: 47,6 kg $\Rightarrow \frac{101{,}2 - 47{,}6}{9} = 5{,}95... \approx 6 \Rightarrow$ Klassenbreite 6 kg
Klassengrenzen:
Werte ab 47,55 kg werden auf 47,6 kg gerundet, daher lauten die Klassengrenzen 47,55 kg, 53,55 kg ...

2)

Klassen (Werte in kg)	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	prozentuelle Häufigkeit	Häufigkeits-summe
47,55 - 53,55	8	0,0870	8,70%	8,70%
53,55 - 59,55	10	0,1087	10,87%	19,57%
59,55 - 65,55	24	0,2609	26,09%	45,65%
65,55 - 71,55	20	0,2174	21,74%	67,39%
71,55 - 77,55	11	0,1196	11,96%	79,35%
77,55 - 83,55	10	0,1087	10,87%	90,22%
83,55 - 89,55	4	0,0435	4,35%	94,57%
89,55 - 95,55	2	0,0217	2,17%	96,74%
95,55 - 101,55	3	0,0326	3,26%	100,00%
	92			

BC **10.11** Erhebe bei der Statistik Austria die aktuellste Altersverteilung der Österreicherinnen und Österreicher. Nimm eine Klasseneinteilung vor und stelle die Verteilung mithilfe eines Histogramms dar.

10.2 Kennzahlen statistischer Verteilungen

10.2.1 Lagemaße

Um die wesentliche Information von Häufigkeitsverteilungen gebündelt zu erfassen, verwendet man Kennzahlen. Dabei ist zu beachten, dass nicht alle Kennzahlen für alle Arten von Daten bzw. Merkmalen geeignet sind. Bei einigen Kennzahlen ist zu unterscheiden, ob mit einer **Grundgesamtheit** oder einer **Stichprobe** gearbeitet wird. Um die Unterscheidung in den Formeln zu erleichtern, werden meist folgende Unterschiede in der Schreibweise gemacht:
Die Anzahl der Daten aus einer **Grundgesamtheit** wird **N** genannt, die einer **Stichprobe n**. Gelten Kennzahlen für Grundgesamtheiten, so werden sie zur leichteren Unterscheidbarkeit mit griechischen Buchstaben abgekürzt.

Lagemaße ermöglichen es, die Lage des „Zentrums" einer Verteilung mit einer Zahl möglichst gut zu erfassen.

Das arithmetische Mittel

10.12 Am Flohmarkt hat Katrin am Freitag 30,00 € eingenommen, am Samstag 65,00 € und am Sonntag 40,00 €. Wie viel hat sie im Schnitt pro Tag eingenommen?

AB

Im Alltag empfinden wir oft jenen Wert als „Durchschnitt", der in der Mathematik als **arithmetisches Mittel** folgendermaßen definiert ist:

$$\text{arithmetisches Mittel} = \frac{\text{Summe der Einzelwerte}}{\text{Anzahl der Einzelwerte}}$$

Das Berechnen der Summe der Einzelwerte und damit des arithmetischen Mittels ist nur für metrische (quantitative) Merkmale sinnvoll und zulässig. Im Allgemeinen ist das arithmetische Mittel kein Teil der Urliste.

Zum Beispiel: Die in der Praxis oft durchgeführte Berechnung eines (Schul-)Notendurchschnitts ist statistisch nicht korrekt, da es sich dabei um ein Rangmerkmal handelt. Es ist zum Beispiel die Differenz zwischen den Noten 1 und 2 nicht die gleiche wie zwischen den Noten 4 und 5, die Berechnung des arithmetischen Mittels ist daher streng genommen nicht sinnvoll.

Schreibweisen für das arithmetische Mittel:

Grundgesamtheit vom Umfang N:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

Stichprobe vom Umfang n:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Wurden die Häufigkeiten bereits ermittelt, so kann die Summe der Einzelwerte mit deren Hilfe rascher ermittelt werden. Anstelle der Addition aller Einzelwerte werden die Merkmalsausprägungen mit den jeweiligen Häufigkeiten multipliziert. Bei Verwendung der relativen Häufigkeiten entfällt die Division durch die Anzahl der Werte.

ZB: In Abschnitt 10.1 haben wir die Anzahl der Geschwister der Schülerinnen und Schüler einer Klasse untersucht.

$\bar{x} = \frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{25} = 0{,}96$ bzw.

$\bar{x} = 0 \cdot 0{,}32 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}08 = 0{,}96$

Das heißt, im Mittel hat eine Gruppe von 100 Schülerinnen und Schüler in Summe 96 Geschwister.

Anzahl der Geschwister		
Merkmals-ausprägung	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
0	8	0,32
1	12	0,48
2	3	0,12
3	2	0,08
	25	

Mithilfe des Summenzeichens Σ (Σ ... „Sigma", griechischer Großbuchstabe) kann man Summen kürzer anschreiben, zB: $\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

Das **arithmetische Mittel** (μ bzw. $\bar{x}$) ist das am häufigsten verwendete Lagemaß für metrische Merkmale.

Grundgesamtheit (Umfang N)

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Stichprobe (Umfang n)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Berechnung mithilfe der **absoluten Häufigkeiten** h_i bzw. der **realitiven Häufigkeiten** r_i:
(k ... Anzahl der verschiedenen Merkmalsausprägungen):

$$\mu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot r_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot r_i$$

Quantile: Median, Quartile, Perzentile

BC **10.13** Ein Dorf besteht aus 10 Häusern, wobei 5 Häuser eine Wohnfläche von 100 m^2, 3 Häuser eine Wohnfläche von 130 m^2 und 2 Häuser eine Wohnfläche von 200 m^2 haben. In der Nähe steht ein Schloss mit einer Wohnfläche von 7 650 m^2. Ermittle das arithmetische Mittel der Wohnflächen ***1)*** nur des Dorfs, ***2)*** des Dorfs inklusive Schloss. Welcher Eindruck entsteht jeweils?

Die Berechnung des Mittelwerts ist zwar für metrische Merkmale immer zulässig, jedoch nicht immer sinnvoll. Mitunter beeinflusst ein stark abweichender Wert den Mittelwert so, dass ein falscher Eindruck entsteht. Einen solchen Wert bezeichnet man als **Ausreißer**.

ZB: Dem Einkommensbericht der Statistik Austria kann man entnehmen, dass im Jahr 2010 der (arithmetische) Mittelwert des Bruttojahreseinkommens der unselbständig erwerbstätigen Österreicherinnen und Österreicher 28 715,00 € betrug. Da wenige sehr hohe Einkommen diesen Wert jedoch stark beeinflussen, wird üblicherweise eine andere Kennzahl angegeben: Der Betrag in der Spalte Median bedeutet, dass 50 % der Erwerbstätigen 24 516,00 € oder weniger verdient haben.

Bruttojahreseinkommen der unselbständig Erwerbstätigen 2010

Jahr	Median	Arithmetisches Mittel
	EUR	
2010	24 516	28 715

Der Wert in der „Mitte" einer geordneten Liste von Werten heißt **Median** oder **Zentralwert** $\tilde{x}$. Ist die Anzahl der Werte gerade, so ist der Median das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte. Der Median „teilt" die geordnete Liste in zwei gleich große Teile. Mindestens 50 % aller Werte sind kleiner gleich dem Median, mindestens 50 % aller Werte sind größer gleich dem Median. Da als „Rechenschritt" nur erforderlich ist, die Liste der Urwerte zu ordnen, ist der Median auch für Rangmerkmale angebbar. Einzelne, weit von den anderen Werten entfernt liegende Merkmalsausprägungen, beeinflussen den Median im Gegensatz zum arithmetischen Mittel nicht.

Als **Median** oder **Zentralwert** $\tilde{x}$ einer Verteilung bezeichnet man den **mittleren Wert der geordneten Liste** bzw. das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte, falls die Anzahl der Werte gerade ist.
(Mindestens) 50 % aller Werte sind kleiner gleich $\tilde{x}$, (mindestens) 50 % sind größer gleich $\tilde{x}$.

B

10.14 Ermittle den Median der angegebenen Daten.

a) 8 4 7 6 4 9 11 7 5 **b)** 78 45 32 66 81 55 90 60 62 71 49 84

Lösung:

a) Geordnete Liste:

4 4 5 6 **7** 7 8 9 11

Median: $\tilde{x} = 7$

- Die Liste enthält neun Elemente, der Wert in der Mitte ist daher das 5. Listenelement.

b) Geordnete Liste:

32 45 49 55 60 **62** **66** 71 78 81 84 90

Median: $\tilde{x} = \frac{62 + 66}{2} = 64$

- Die Liste enthält zwölf Elemente. Der Median ist das arithmetische Mittel der beiden „mittleren" Werte.

BCD

10.15 Bei einer Telefonumfrage werden 15 Personen befragt, wie oft sie im vergangenen Jahr ein Theater besucht haben. Ermittle aus der Urliste das arithmetische Mittel und den Median. Welcher Wert beschreibt die Verteilung besser? Begründe deine Antwort.

Urliste: 0 1 1 5 3 2 0 27 3 0 8 7 6 0 2

Lösung:

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 27 \cdot 1}{15} = 4{,}33... \approx 4{,}3$

Median:

Geordnete Liste: 0 0 0 0 1 1 2 **2** 3 3 5 6 7 8 27

$\tilde{x} = 2$

Der Median beschreibt die Verteilung besser, weil das arithmetische Mittel durch den Ausreißer 27 stark beeinflusst wird.

Detailliertere Informationen als der Median liefern die **Quartile**. Das zweite Quartil q_2 entspricht dem Median. Aus den vor dem Median liegenden Teil der geordneten Liste wird – analog zum Median – der „mittlere" Wert bestimmt. Dieser wird als erstes Quartil q_1 bezeichnet. (Mindestens) 25 % alle Werte sind kleiner gleich q_1. Ebenso kann in der oberen Hälfte das dritte Quartil q_3 ermittelt werden.

ZB: In einem Kindergarten wurde die Größe von 15 Dreijährigen erhoben.
Geordnete Liste der Werte (in cm):

88,3 91,6 92,4 [93,5] 94,9 96,4 97,0 [97,6] 98,1 98,7 99,3 [99,8] 100,3 103,8 105,1

q_1: Mindestens 25 % aller Kinder sind 93,5 cm groß oder kleiner.

$\tilde{x} = q_2$: Mindestens 50 % aller Kinder sind höchstens 97,6 cm groß.

q_3: Mindestens 75 % aller Kinder sind höchstens 99,8 cm groß.

Zur grafischen Veranschaulichung verwendet man einen **Boxplot** (**Kastenschaubild**).

x_{min} q_1 $\tilde{x} = q_2$ q_3 x_{max}

88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105

Für eine noch genauere Unterteilung verwendet man **Perzentile**. Sie geben für vorgegebene Prozentsätze p % den Wert an, für den p % aller Werte kleiner gleich dieser Grenze sind. Üblich ist diese Angabe zum Beispiel, um Größen- und Gewichtsentwicklung von Kindern darzustellen.

Aus Abbildung 10.1 kann man ablesen:

- 3 % der 12-jährigen Mädchen haben 35 kg oder weniger.
- 90 % der 13-jährigen Mädchen haben maximal 75 kg, also nur 10 % der 13-jährigen haben 75 kg oder mehr.

Wachstumsdiagramm
Mädchen, 0 - 18 Jahre

Körpergewicht/Lebensalter

Quelle: Monatsschrift Kinderheilkunde 8•2001

Abb. 10.1

Modalwert (Modus)

In einer bekannten Fernsehquiz-Show, bei der Kandidatinnen bzw. Kandidaten aus vier möglichen Antworten A, B, C und D die richtige auswählen müssen, kann man die Hilfe der Zuschauer/innen in Form eines „Publikumsjokers" in Anspruch nehmen. Oft entscheiden sich die Kandidatinnen bzw. Kandidaten dann für jene Antwort, die die meisten Zuschauer/innen gewählt haben. Dieser am **häufigsten vorkommende Wert** heißt **Modalwert** oder **Modus** der Verteilung. Treten mehrere Werte gleich häufig auf, so gibt es mehrere Modalwerte. Dieses Lagemaß ist das einzige, das auch für nominale (qualitative) Merkmale ermittelt werden kann.

Publikumswertung: A 10%, B 65%, C 22%, D 3%

Der häufigste Wert einer Liste heißt **Modalwert** oder **Modus**, bei gleicher Häufigkeit gibt es mehrere Modalwerte.

BC **10.16** An der Kassa eines Baumarkts wurden die Kunden nach der Postleitzahl ihres Wohnorts befragt. Ermittle den Modalwert der Urliste:

1210 1190 1210 1220 1220 2202 1200 1110 1190 1210 1180 2230
1190 2202 1200 1190 1180 2230 1220 1210 2211 1190 1210

Lösung:

1110: |	1200: ||	2202: ||
1180: ||	1210: 𝍸	2211: |
1190: 𝍸	1220: |||	2230: ||

Es gibt zwei Modalwerte: 1190 und 1210

TE

Technologieeinsatz: Lagemaße

Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)

In der Funktionengruppe Statistik gibt es die Befehle **MITTELWERT** zur Bestimmung des arithmetischen Mittels, **MEDIAN** und **MODUS.EINF**.
Als Eingabe ist jeweils die Liste der Daten anzugeben.

4	=MITTELWERT(A1:A9)
5	
7	=MEDIAN(A1:A9)
10	
9	=MODUS.EINF(A1:A9)
1	
2	
5	
3	

4	5,11	Mittelwert
5		
7	5	Median
10		
9	5	Modalwert
1		
2		
5		
3		

10.17 Ermittle das arithmetische Mittel der Daten aus der gegebenen Häufigkeitsverteilung. B

a)

Länge in mm	absolute Häufigkeit
2	17
2,5	24
3	26
3,5	15
4	22
4,5	9
5	2

b)

Profiltiefe in mm	prozentuelle Häufigkeit
3,6	2,4 %
3,7	7,3 %
3,8	10,8 %
3,9	8,2 %
4	9,5 %
4,1	15,6 %
4,2	22,4 %
4,3	15,3 %
4,4	5,1 %
4,5	3,4 %

10.18 In Abbildung 10.2 sind die Einwohnerzahlen der EU-Mitgliedsstaaten angegeben. BC
1) Ermittle das arithmetische Mittel und den Median.
2) Beim Übertragen der Werte wird für Frankreich irrtümlich ein Wert von 654 Mio. eingegeben. Wie wirkt sich dieser Fehler auf das arithmetische Mittel bzw. den Median aus?

Mitgliedsstaat	Bevölkerung (Mio.)
Malta	0,4
Luxemburg	0,5
Zypern	0,9
Estland	1,3
Lettland	2,0*
Slowenien	2,1
Litauen	3,2
Irland	4,5
Finnland	5,4
Slowakei	5,4
Dänemark	5,6
Bulgarien	7,3
Österreich	8,4
Schweden	9,5
Ungarn	10,0
Tschechien	10,5
Portugal	10,5
Belgien	11,0
Griechenland	11,3
Niederlande	16,7
Rumänien	21,4
Polen	38,2
Spanien	46,2
Italien	60,9
Großbritannien	63,0
Frankreich	65,4
Deutschland	81,8
Gesamt	503,5

Quelle: EUROSTAT, Stand Jänner 2012, * ... vorläufig

Abb. 10.2

10.19 Bei einer Prüfung erreichten die Kandidaten folgende Punktezahlen: 22 15 9 18 12 23 25 17 16 12 19 21 20 3 19 20 14 16 16 22 23 9 11 B
1) Berechne das arithmetische Mittel.
2) Ermittle den Median, die Quartile q_1 und q_3 und erstelle einen Boxplot.

10.20 Welches der behandelten Lagemaße ist immer ein Wert der Urliste, welches nicht? Begründe deine Antwort. D

10.21 In der 2AHET und in der 2BHET wurde der gleiche Test abgehalten. Die 27 Schülerinnen und Schüler der 2AHET erreichten im Mittel 34 Punkte. In der 2BHET mit 23 Schülerinnen und Schülern betrug das arithmetische Mittel 38 Punkte. Wie groß ist das arithmetische Mittel der Punktezahlen aller 50 Teilnehmenden? Welche der beiden Klassen hat das arithmetische Mittel mehr beeinflusst? ABC

10.22 Für das arithmetische Mittel gilt, dass die Summe der Differenzen aller Werte vom Mittelwert null ergibt. ABD
1) Prüfe die Behauptung an einem selbst gewählten Beispiel mit fünf Werten nach.
2) Beweise, dass diese Aussage allgemein gültig ist.

10.2.2 Streuungsmaße

BC **10.23** Zwei Gruppen zu je fünf Personen erreichten bei einem Test folgende Punkteanzahlen: Gruppe 1: 2 3 3 3 4 Gruppe 2: 1 1 3 5 5

1) Gib für beide Gruppen das arithmetische Mittel an.

2) Was unterscheidet die Testergebnisse der beiden Gruppen voneinander?

Mithilfe der Lagemaße können wir gewisse Informationen über die Größe der Werte eines Datensatzes angeben. Diese Zahlen sagen jedoch nichts darüber aus, wie weit die Werte voneinander oder von einem gewählten Lagemaß entfernt liegen. Die Streuungsmaße beschreiben diese Abweichung voneinander. Die Berechnung dieser Maßzahlen ist im Allgemeinen nur für metrische Merkmale möglich.

Spannweite (Range)

Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert von Daten wird als **Spannweite** $R = x_{max} - x_{min}$ bezeichnet. Die Spannweite ist leicht zu ermitteln und von Lagemaßen unabhängig, hat aber den Nachteil, durch einzelne Ausreißer stark beeinflusst zu werden.

Interquartilsabstand

Weniger anfällig für Ausreißer ist die Differenz zwischen den Quartilsgrenzen q_1 und q_3. Der **Interquartilsabstand** $d = q_3 - q_1$ gibt an, in welchem Bereich die mittleren 50 % aller Werte liegen.

Spannweite R	**Interquartilsabstand d**
$R = x_{max} - x_{min}$	$d = q_3 - q_1$

Varianz und Standardabweichung

Die wichtigste Kennzahl zur Beschreibung der Streuung von metrischen Merkmalen ist die **Varianz** σ^2 bzw. die Wurzel aus der Varianz, die **Standardabweichung** σ. Wir suchen eine Maßzahl, die beschreibt, wie weit die Merkmalsausprägungen „im Durchschnitt" vom Mittelwert μ entfernt sind. Die Summe aller Differenzen vom Mittelwert ist jedoch ungeeignet, da sie immer null ist (siehe Aufgabe 10.22).

ZB: Die Temperatur T um 12:00 Uhr wird zehn Tage lang aufgezeichnet:

2 °C 2 °C 4 °C 4 °C 2 °C 1 °C 2 °C 5 °C 6 °C 2 °C

Wir berechnen den Mittelwert $\mu = 3$ °C. Mithilfe eines Diagramms können die jeweiligen Abweichungen vom Mittelwert veranschaulicht werden.

Um ein Maß für die Streuung zu erhalten, quadrieren wir die Differenzen vom Mittelwert μ, hier also $(T_i - 3)^2$. Den Mittelwert dieser Abweichungsquadrate bezeichnet man als Varianz σ^2.

$$\sigma^2 = \frac{(2-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2 + (2-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2 + (2-3)^2}{10} = 2{,}4$$

Um die Berechnung zu vereinfachen, kann man bei gleichen Werten die Abweichungsquadrate jeweils mit der Häufigkeit multiplizieren: $\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 \cdot 5 + (4-3)^2 \cdot 2 + (5-3)^2 + (6-3)^2}{10} = 2{,}4$

Die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2{,}4} \approx 1{,}55$ °C gibt an, wie stark die Werte in Bezug auf den Mittelwert streuen.

Arbeitet man hingegen mit einer Stichprobe mit dem Mittelwert $\bar{x}$, so wird die Varianz mit s^2 und mit folgender Formel berechnet:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Es wird dabei nicht durch den Stichprobenumfang n, sondern durch (n – 1) dividiert.
Die mathematische Begründung kann erst in Band 4 erfolgen. Zudem hat sich dieser Wert in der Praxis als besser geeignet erwiesen.

Das wichtigste **Streuungsmaß** in der Statistik ist die **Varianz**.
Man unterscheidet bei der Berechnung zwischen Grundgesamtheiten und Stichproben.

Varianz einer Grundgesamtheit mit N Werten:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

Varianz einer Stichprobe mit n Werten:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Varianz von klassifizierten Daten:
Es wird mit den Klassenmitten x_i und deren Klassenhäufigkeiten h_i gearbeitet.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} h_i \cdot x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot x_i \qquad k \text{ ... Anzahl der Klassen}$$

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird im Alltag oft die Wurzel aus der Varianz, die **Standardabweichung σ** bzw. **s** verwendet.

Bemerkung: Für die numerische Berechnung kann man auch folgende, durch Umformen entstandene Formeln verwenden (siehe Aufgabe 10.30):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N \cdot \mu^2\right) \quad \text{bzw.} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right)$$

10.24 Ermittle die Varianz und die Standardabweichung der Stichprobe auf zwei Arten. B

11 8 10 10 12 7 11 13 9 10 8 8 7 11 12 13

Lösung:

1) $\bar{x} = \frac{7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 13 \cdot 2}{16} = 10$

Mittelwert: $\bar{x} = 10$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{16-1} \cdot [2 \cdot (7-10)^2 + 3 \cdot (8-10)^2 + (9-10)^2 + 3 \cdot (10-10)^2 + 3 \cdot (11-10)^2 + 2 \cdot (12-10)^2 + 2 \cdot (13-10)^2] =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot (18 + 12 + 1 + 0 + 3 + 8 + 18) = \frac{60}{15} = 4$$

$$s = \sqrt{s^2} = 2$$

2) $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right) =$

$$= \frac{1}{16-1} \cdot [(2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 8^2 + 9^2 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 11^2 + 2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 13^2) - 16 \cdot 10^2] =$$

$$= \frac{1}{15} \cdot [(98 + 192 + 81 + 300 + 363 + 288 + 338) - 1\,600] = \frac{1\,660 - 1\,600}{15} = 4$$

$$s = \sqrt{s^2} = 2$$

Varianz $s^2 = 4$ bzw. Standardabweichung $s = 2$

Technologieeinsatz: Standardabweichung

Tabellenkalkulationsprogramm (Excel 2010)

Standardabweichung

einer Grundgesamtheit ... **STABW.N** einer Stichprobe ... **STABW.S**

7	=STABW.N(A1:A9)
6	
3	
5	
4	
6	
2	
8	
5	

7	1,79161283
6	
3	
5	
4	
6	
2	
8	
5	

7	=STABW.S(A1:A9)
6	
3	
5	
4	
6	
2	
8	
5	

7	1,90029238
6	
3	
5	
4	
6	
2	
8	
5	

C **10.25** Ordne den gegebenen sechs Boxplots die unten angegebenen Aussagen zu (Mehrfachnennungen sind möglich).

A) **B)** **C)** **D)** **E)** **F)**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1) Der Interquartilabstand beträgt 3.
2) Die Verteilung ist symmetrisch.
3) Ein Viertel der Werte ist größer gleich 7.
4) Die Spannweite beträgt 7.
5) Die Hälfte der Werte liegt im Bereich [2; 7].
6) Ein Viertel der Werte ist kleiner gleich 5.
7) Die Daten streuen stark.
8) Die Hälfte der Werte ist größer 5.

B **10.26** In einer KFZ-Werkstätte wurde eine Stichprobe über den Zeitaufwand bei der Reparatur eines bestimmten Schadens erhoben (Angaben in Stunden):
2,2 3,5 4,1 2,3 1,8 0,9 2,2 3,1 1,9 2,7 4,0 2,7 2,4 3,9 3,5 2,3 3,0 3,1 2,0 1,7 0,5 3,9 3,1
1) Ermittle den Median, die Quartile q_1 und q_3, den Interquartilsabstand, den kleinsten und größten Wert sowie die Spannweite und zeichne einen Boxplot.
2) Ermittle das arithmetische Mittel und die Varianz.

B **10.27** Bei einer Telefonumfrage wurde die Anzahl der Mobiltelefone pro Haushalt erfragt:

Anzahl	0	1	2	3	4
Häufigkeit	18	156	243	161	87

1) Erstelle ein Histogramm.
2) Ermittle das arithmetische Mittel.
3) Berechne die Varianz und die Standardabweichung.

B **10.28** Berechne für die Daten aus 10.10 die Varianz und die Standardabweichung.

AB **10.29** Bei einer Abfüllanlage wurden folgende Messungen vorgenommen (Werte in Milliliter):
434 423 501 509 423 499 500 421 471 456 461 456 499 485 452 437 457 464 475 480
425 425 491 471 483 491 421 502 422 465 480 449 479 450 480 425 499 475 433 461
434 423 501 509 423 499 500 421 471 456 461 456 499 485 452 437 457 464 475 480
444 488 511 489 475 482 476 465 458 449 429 490 471 450 472 474 457 481 462 429
1) Klassifiziere die Daten und erstelle ein Histogramm.
2) Berechne aus den klassifizierten Daten den Mittelwert und die Standardabweichung.

BD **10.30** Zeige die Richtigkeit der Umformung der Formel für die Varianz einer Stichprobe:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

Hinweis: Beachte, dass die Summe aller Merkmalsausprägungen x_i das n-fache des Mittelwerts beträgt.

Zusammenfassung

Statistik befasst sich mit der Erhebung, Auswertung und Darstellung von Daten. Man unterscheidet **metrische (quantitative) Merkmale, ordinale Merkmale (Rangmerkmale)** und **nominale (qualitative) Merkmale**.

Aus praktischen Gründen wird oft statt der **Grundgesamtheit** N nur eine Auswahl, eine **Stichprobe** n, verwendet.

Auswertung von Daten:

Häufigkeitsverteilung
Die absoluten, relativen oder prozentuellen Häufigkeiten von Datenmengen werden meist in Tabellenform angegeben.

Klassenbildung
Große Datenmengen werden zur Übersichtlichkeit klassifiziert und dabei in maximal 20 wenn möglich gleich breite Klassen zusammengefasst.

Lagemaße
Arithmetisches Mittel: Summe aller Werte, dividiert durch deren Anzahl
Median: Mittlerer Wert der geordneten Liste
Quartile: Teilen die Liste in vier Bereiche zu ca. 25 %
Modalwert: Häufigster Wert einer Liste

Streuungsmaße
Spannweite (Range): Differenz zwischen Maximum und Minimum
Interquartilsabstand: Differenz zwischen den Quartilen q_3 und q_1
Varianz σ^2 bzw. s^2: Mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$ bei Grundgesamtheiten bzw. $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ bei Stichproben

Standardabweichung = $\sqrt{\text{Varianz}}$

Grafische Darstellung: **Säulendiagramm, Pareto-Diagramm, Histogramm, Boxplot**

Weitere Aufgaben

C

10.31 Gib an, welche der genannten Merkmale metrische Merkmale, Rangmerkmale bzw. nominale Merkmale sind: Größenklassen von Hühnereiern, Geburtsgewicht von Säuglingen, Staatsangehörigkeit, Sterne von Hotels, Inflationsraten von Staaten, Religionszugehörigkeit

B

TE

10.32 Der Durchmesser von Werkstücken wurde gemesessen (Werte in Millimeter):

73 70 68 73 63 67 71 67 69 73
64 65 75 69 74 65 68 69 64 72
66 78 69 75 68 77 69 74 68 65
67 71 68 64 75 67 63 70 69 71

1) Erstelle eine Tabelle mit der Häufigkeitsverteilung, ermittle auch die Häufigkeitssummen.
2) Erstelle ein Säulendiagramm und stelle die Häufigkeitssummen grafisch dar.
3) Berechne folgende Lagemaße: Mittelwert, Median, Quartile q_1 und q_3
4) Erstelle einen Boxplot und gib die Spannweite und den Interquartilsabstand an.
5) Berechne die Varianz und die Standardabweichung.

BC **10.33** Folgende Statistik zeigt die Anzahl der Touristen in einer Kleinstadt in den Jahren 2002 und 2012.

	2002	2012
Touristen	121 731	234 287
Inländische Gäste	21 456	32 017
Ausländische Gäste aus	100 275	202 270
Deutschland	40 130	77 402
Frankreich	7 455	12 898
Großbritannien	6 989	11 697
Italien	12 961	34 002
Japan	4 108	12 214
Schweden	4 477	4 637
Schweiz und Liechtenstein	6 802	13 974
Spanien	3 514	13 517
USA	13 208	18 655
andere	631	3 274

Erstelle für jedes der beiden Jahre ein Pareto-Diagramm und interpretiere das Ergebnis.

BCD **10.34** Beim Überprüfen einer Produktion von Widerständen mit einem Nennwert von 1 kΩ wurden folgende Werte gemessen (Werte in kΩ):

1,05	0,99	1,02	0,95	1,00	1,04	1,02	0,98	0,97	1,01	1,02
0,95	1,02	1,04	1,01	0,98	0,97	0,98	0,99	1,03	0,97	1,03
1,00	0,97	1,03	1,02	1,04	0,95	1,01	0,98	0,97	0,99	1,01
0,99	1,03	1,01	1,03	0,95	0,99	1,01	0,99	1,05	0,95	1,01

1) Berechne das arithmetische Mittel und vergleiche es mit dem Nennwert.
2) Eine Abweichung von 5 % vom Nennwert wird toleriert. Gib den entsprechenden Bereich an und überprüfe, ob alle Werte innerhalb des Toleranzbereichs liegen.
3) Ermittle den Modalwert.
4) Gib an, mit welchem Maß man die durchschnittliche quadratische Abweichung vom Mittelwert beschreiben kann und ermittle den entsprechenden Wert.

AB **10.35** 100 Personen wurden während einer Diät medizinisch betreut und ihre Abnehmerfolge aufgezeichnet (Werte in kg).

4,3	2,1	2,0	3,5	3,0	3,1	2,9	1,0	1,4	1,8	1,5	1,3,	5,0	4,1	4,0	3,4	3,3	2,7	2,2	3,5
1,1	4,5	1,1	3,3	3,4	1,1	1,2	4,1	4,2	4,3	1,2	1,7	2,0	3,0	3,1	3,1	2,1	2,1	2,4	2,5
2,6	2,8	2,8	2,9	1,9	2,4	3,9	1,3	2,6	1,3	1,4	1,6	3,0	1,7	3,0	3,8	3,2	4,2	2,9	3,7
3,3	4,4	3,5	1,6	3,7	4,0	4,4	2,5	5,2	2,6	1,5	2,9	1,0	1,4	4,0	3,4	3,3	2,7	1,9	2,6
4,3	2,1	1,8	2,9	1,0	1,4	3,1	3,1	2,1	1,8	2,0	3,9	1,3	3,3	2,7	2,2	2,6	1,3	4,2	3,5

1) Nimm eine Klasseneinteilung vor und erstelle eine Häufigkeitstabelle und ein Histogramm.
2) Ermittle aus den klassifizierten Daten das arithmetische Mittel und die Varianz.

Weitere Aufgaben in den Zusatzheften

Wissens-Check

		gelöst
1	Welche Merkmalsarten von Daten kennst du? Gib jeweils ein Beispiel an.	
2	Gib an, ob das Merkmal diskret oder stetig ist. A) Anzahl Handys pro Haushalt C) Fußgrößen B) Temperaturwerte D) Schuhgrößen	
3	Ein Pareto-Diagramm ordnet die Häufigkeiten …	
4	Ich kenne die Richtlinien für eine Klasseneinteilung und weiß, wie die grafische Darstellung heißt. Zum Beispiel würde ich für 100 Daten … Klassen wählen.	
5	Warum sind mindestens 50 % aller Werte kleiner gleich dem Median?	
6	Was kann man aus einem Boxplot ablesen?	
7	Bei welcher Merkmalsart ist der Modalwert das einzige Lagemaß, das ermittelt werden kann? Nenne ein Beispiel.	
8	Welchen Vorteil hat der Interquartilsabstand gegenüber der Spannweite? Erkläre dies anhand folgender Datenreihe. 102,6; 101,5; 101,0; 102,1; 80,0; 102,2; 101,9; 102,4; 102,7; 102,8; 102,1; 101,9	
9	Warum ist die Summe aller Differenzen vom Mittelwert als Streuungsmaß ungeeignet?	
10	Gib die unterschiedlichen Formeln für die Varianz einer Grundgesamtheit und einer Stichprobe an.	
11	Berechne die Standardabweichung s der Daten: 23,6; 22,8; 21,9; 24,8; 23,9; 23,5; 23,3; 22,8; 23,8; 21,9 Wäre der Wert für σ größer oder kleiner? Begründe deine Antwort.	
12	Ermittle für 10 Autos das arithmetische Mittel und den Median des Benzinverbrauchs (Werte in Liter pro 100 km). Welcher Wert beschreibt die Verteilung besser? Begründe kurz deine Antwort. 6,6; 3,9; 8,7; 3,8; 24,1; 7,5; 8,4; 7,3; 9,4; 21,5	

Lösung:
1) siehe Seite 259 2) A) diskret, B) stetig, C) stetig, D) diskret 3) fallend an.
4) siehe Seite 264; Histogramm; 10 5) Es gibt zwei Möglichkeiten: Bei einer geraden Anzahl von Werten ist der Median nicht Teil der Urliste und es sind genau 50 % der Werte kleiner. Bei einer ungeraden Anzahl ist der Median Teil der Urliste und es bleiben somit weniger als 50 % der Werte, die größer sind, übrig. 6) siehe Seite 267
7) siehe Seite 268 8) Der Interquartilsabstand ist nicht so anfällig für den Ausreißer 80,0.
9) siehe Aufgabe 10.22 10) siehe Seite 271 11) s = 0,904…; σ ist kleiner (σ = 0,857…), da das Ergebnis wegen der Division durch (n – 1) größer ist. 12) $\bar{x}$ = 10,12; $\tilde{x}$ = 7,95; Der Median, da der Mittelwert durch die zwei Ausreißer nach oben verschoben wird.

11 Folgen und Reihen

Was haben die Anzahl der Äste vieler Bäume, der PIN-Code eines Handys und die Ziffernkombination eines Fahrradschlosses gemeinsam? Die Lösung ist einfach: Man kann sie durch eine bestimmte Anordnung von Zahlen beschreiben.

Betrachtet man die Anzahl der Äste des abgebildeten Baums, so sieht man, dass im 1. Jahr nur 1 „Ast", der Stamm, vorhanden war. Auch im 2. Jahr war lediglich 1 Ast vorhanden, im 3. Jahr waren es 2 = 1 + 1 Äste, im 4. Jahr waren es 3 = 2 + 1 Äste, im 5. Jahr waren es 5 = 3 + 2 Äste usw.

Mathematisch lässt sich dieser Vorgang mit dem Begriff der Zahlenfolge erfassen. Das Erstellen von Zahlenfolgen und das Rechnen mit diesen Folgen ist das Thema dieses Abschnitts.

11.1 Einführung

AD **11.1** Eine beliebte Denksportaufgabe lautet: Welche Zahl ist die nächste? Beantworte diese Frage und begründe deine Antwort.

1) 2, 4, 6, 8, 10 ... ***2)*** 2, 3, 5, 7, 11 ... ***3)*** 1, 4, 9, 16, 25 ...

Die **Anordnung von Zahlen** in einer **bestimmten Reihenfolge** wird in der Mathematik als **Zahlenfolge** (kurz: **Folge**) bezeichnet. In einer Folge wird jedem „Platz" eine bestimmte Zahl zugeordnet. So bedeutet die Reihenfolge der Ziffern des Zahlenschlosses „6702", dass am „ersten Platz" ein Sechser, am „zweiten Platz" ein Siebener, usw. steht. Die einzelnen Zahlen einer Folge heißen **Glieder der Folge**. Man sagt, das erste Glied der Zahlenfolge „6702" ist 6, das zweite Glied ist 7, usw.

Die Glieder einer Folge können durch Aufzählen oder durch ein so genanntes **Bildungsgesetz** angegeben werden. Jeder natürlichen Zahl n wird dabei ein bestimmter Wert a_n zugeordnet. **Zahlenfolgen** sind also **Funktionen**.

Die Definitionsmenge ist im Allgemeinen $D_f = \mathbb{N}^*$, also n = 1, 2, 3 ... . Manchmal ist es allerdings sinnvoll, mit n = 0 zu beginnen. In diesen Fällen wird darauf hingewiesen werden. Ist die Definitionsmenge endlich mit $D_f = \{1, 2, 3 \dots n\}$, spricht man von einer **endlichen Folge**, andernfalls von einer **unendlichen Folge**.

Um Folgen von Mengen zu unterscheiden, werden sie mit spitzen Klammern $\langle a_n \rangle$ angeschrieben. In vielen Fällen, zum Beispiel bei der Angabe des Bildungsgesetzes, werden diese Klammern aber auch weggelassen, zB: $\langle 1, 4, 9, 16 \dots \rangle$ oder $a_n = n^2$

Eine **Zahlenfolge** (kurz: **Folge**) $\langle a_n \rangle$ ist eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen oder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist. Die Zuordnungsvorschrift wird **Bildungsgesetz** genannt.

Ist die Definitionsmenge endlich, so erhält man eine **endliche Zahlenfolge**.
Ist die Definitionsmenge unendlich, so erhält man eine **unendliche Zahlenfolge**.

Darstellung von Folgen

Um Folgen und die Glieder einer Folge zu beschreiben, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- **Angabe mithilfe einer Funktionsgleichung (eines erzeugenden Terms):** Die Glieder der Folge werden mithilfe des Index n berechnet. Diese Darstellung wird auch als **explizite Darstellung** bezeichnet (latein: „explicare" = (sich) entwickeln).

  ZB: $a_n = 5^n$
  $a_1 = 5^1 = 5$
  $a_2 = 5^2 = 25$
  $a_3 = 5^3 = 125$

  Um das 1. Glied a_1 zu erhalten, wird n = 1 in das Bildungsgesetz eingesetzt. Für n = 2 erhält man a_2 usw.

  Für den Index werden häufig auch die Buchstaben „i" oder „k" verwendet.

- **Verwendung einer Rekursionsformel:** Mit einer **Rekursionsformel** wird ein Glied der Folge mithilfe vorangegangener Glieder berechnet (latein: „recurrere" = zurück laufen). Dazu benötigt man ein oder mehrere Glieder der Folge sowie eine Vorschrift zur Berechnung der weiteren Glieder.

  ZB: $a_{n+1} = a_n - 7$ mit $a_1 = 3$
  $a_2 = a_1 - 7 = 3 - 7 = -4$
  $a_3 = a_2 - 7 = -4 - 7 = -11$
  $a_4 = a_3 - 7 = -11 - 7 = -18$

  Ein Glied der Folge muss gegeben sein. Kennt man a_1, so erhält man durch Einsetzen in das Bildungsgesetz a_2 usw.

  Der Zusammenhang zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern kann statt $a_{n+1} = a_n - 7$ auch als $a_n = a_{n-1} - 7$ angegeben werden.

- **Aufzählende Beschreibung:** Die Angabe aller Glieder ist nur bei kurzen, endlichen Folgen sinnvoll oder wenn die Fortsetzung offensichtlich ist, wie zB $\langle a_n \rangle = \langle 2, 4, 6, 8, 10 \ldots \rangle$.

- **Verbale Beschreibung:** Diese eignet sich besonders, wenn die Glieder eine gemeinsame „Eigenschaft" haben, wie zum Beispiel „die Vielfachen von Neun", „die Jokerzahl im Lotto" oder „die ersten zehn Dezimalstellen von π".

11.2 Wie könnte die nächste Zahl lauten? Begründe deine Antwort. AD

1) $\langle 1, 3, 5, 7 \ldots \rangle$
2) $\langle 7, 49, 343, 2\,401, 16\,807 \ldots \rangle$
3) $\langle 1, -2, 3, -4, 5 \ldots \rangle$
4) $\langle 5, 1, -3, -7 \ldots \rangle$

Aufgaben 11.3 – 11.4: Gib jeweils das Bildungsgesetz der endlichen Folge mit eigenen Worten an.

11.3 **a)** $\langle 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \rangle$ **b)** $\langle 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 \rangle$ AC

11.4 **a)** $\langle 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \rangle$ **b)** $\left\langle \frac{8}{7}, 1, \frac{10}{11}, \frac{11}{13}, \frac{4}{5}, \frac{13}{17}, \frac{14}{19}, \frac{5}{7}, \frac{16}{23}, \frac{17}{25} \right\rangle$ AC

11.5 Am Zentrum für internationale Lichtkunst Unna e. V. (Deutschland) ist eine von Mario Merz (italienischer Künstler, 1925 – 2003) gestaltete Lichtinstallation mit der Zahlenfolge $\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots \rangle$ angebracht. ABCD TE

1) Formuliere ein passendes Bildungsgesetz mit eigenen Worten.
2) Berechne mithilfe von Technologieeinsatz die ersten 50 Glieder. Welches Glied der Folge ist als erstes größer als eine Million? Schätze zuerst.
3) Welches ist die größte Zahl auf diesem Kunstwerk? Recherchiere diese.

11.2 Arithmetische Folgen und Reihen

11.2.1 Arithmetische Folgen

AB **11.6** Der Abstand zwischen den einzelnen Stufen ist bei der abgebildeten Treppe immer gleich groß. Er beträgt von Oberkante zu Oberkante 18 cm.

1) Berechne den Höhenunterschied zwischen der 3. und 5. Stufe sowie zwischen der 7. und 9. Stufe.

2) Wie hoch ist eine Treppe, die aus 13, 14, 15 bzw. n solchen Stufen besteht?

Betrachtet man zum Beispiel $\langle a_n \rangle = \langle 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 \ldots \rangle$, so sieht man, dass die Differenz $a_{n+1} - a_n$ zweier aufeinander folgender Glieder immer denselben Wert, nämlich drei, hat. Folgen, bei denen die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist, nennt man **arithmetische Folgen**. Diese Differenz kann positiv oder negativ sein.

Für das Bildungsgesetz der Folge $\langle 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 \ldots \rangle$ gilt:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 1 \cdot 3 = 2 + 1 \cdot 3 = 5$

$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \implies$ allgemein: $a_{n+1} = a_n + 3$ bzw. $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$

Die Differenz zwischen zwei nicht unmittelbar benachbarten Gliedern ist somit immer ein Vielfaches von drei.

Eine **arithmetische Folge** $\langle a_n \rangle$ ist eine Folge, bei der die **Differenz d** zweier aufeinander folgender Glieder **konstant** ist. Es gilt: $d = a_{n+1} - a_n$

Das Bildungsgesetz einer arithmetischen Folge kann angegeben werden

als Rekursionsformel:	durch einen erzeugenden Term:
$a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Die Rekursionsformel kann auch als $a_n = a_{n-1} + d$ angegeben sein.

B **11.7** Gib die ersten fünf Glieder der Folge an.

a) $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 17$ ***b)*** $a_n = 6 + (n-1) \cdot 4$

Lösung:

a) $a_1 = 17$

$a_2 = a_1 + 2 = 17 + 2 = 19$

$a_3 = a_2 + 2 = 19 + 2 = 21$

$a_4 = a_3 + 2 = 21 + 2 = 23$

$a_5 = a_4 + 2 = 23 + 2 = 25$

Die ersten fünf Glieder der Folge lauten: $\langle 17, 19, 21, 23, 25 \ldots \rangle$

b) $a_n = 6 + (n-1) \cdot 4$

$a_1 = 6 + (1-1) \cdot 4 = 6$ • $n = 1$

$a_2 = 6 + (2-1) \cdot 4 = 10$ $n = 2$, usw.

$a_3 = 6 + (3-1) \cdot 4 = 14$

$a_4 = 6 + (4-1) \cdot 4 = 18$

$a_5 = 6 + (5-1) \cdot 4 = 22$

Die ersten fünf Glieder der Folge lauten: $\langle 6, 10, 14, 18, 22 \ldots \rangle$

11.8 ***1)*** Gib d und a_1 für die Folge $a_n = -4 + 8n$ an.
2) Welches Glied der Folge hat den Wert 412?

B

Lösung:

1) $d = 8$

$a_1 = -4 + 8 \cdot 1 = 4$

- Die Differenz d kann aus der Angabe abgelesen werden: Wird n um 1 vergrößert, so wird a_{n+1} um 8 vergrößert.
- Das 1. Glied kann mit n = 1 berechnet werden.

2) $412 = -4 + 8n$

$416 = 8n$

$n = 52$

Das 52. Folgeglied hat den Wert 412.

11.9 Gib ein Bildungsgesetz der arithmetischen Folge mit $a_{17} = 52$ und $a_{22} = 37$ an. Beschreibe deine Vorgehensweise.

ABD

Lösung:

1. Lösungsweg:

$a_{22} = a_{17} + 5 \cdot d$

$37 = 52 + 5 \cdot d \Rightarrow d = -3$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$52 = a_1 + 16 \cdot (-3) \Rightarrow a_1 = 100$

$a_n = 100 - (n - 1) \cdot 3$

Zwischen den beiden Gliedern a_{22} und a_{17} liegen (22 – 17) = 5 „Schritte".

2. Lösungsweg:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$\left.\begin{aligned} 52 &= a_1 + 16d \\ 37 &= a_1 + 21d \end{aligned}\right\} -$$

$15 = \quad -5d \Rightarrow d = -3;\; a_1 = 100$

$a_n = 100 - (n - 1) \cdot 3$

Die beiden Zahlen werden jeweils in die Gleichung $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ eingesetzt. Das so entstandene Gleichungssystem in zwei Variablen wird gelöst.

11.10 Die Summe dreier aufeinander folgender Glieder einer arithmetischen Folge ist 72, ihr Produkt ist 12 648. Wie lauten diese drei Zahlen?

AB

Lösung:

$\langle a_n \rangle = \langle \dots a_k - d, a_k, a_k + d \dots \rangle$

Summe:

$a_k - d + a_k + a_k + d = 72$

$3a_k = 72 \Rightarrow a_k = 24$

Produkt:

$(a_k - d) \cdot a_k \cdot (a_k + d) = 12\,648$

$(24 - d) \cdot 24 \cdot (24 + d) = 12\,648 \quad |:24$

$576 - d^2 = 527$

$d^2 = 49 \Rightarrow d_1 = 7, d_2 = -7$

- Drei aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Folge können verschieden angeschrieben werden, zum Beispiel $\langle a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \rangle = \langle a_k, a_k + d, a_k + 2d \rangle$ oder $\langle a_{k-1}, a_k, a_{k+1} \rangle = \langle a_k - d, a_k, a_k + d \rangle$.

$d_1 = 7 \Rightarrow a_{k-1} = 17;\; a_{k+1} = 31$

$d_2 = -7 \Rightarrow a_{k-1} = 31;\; a_{k+1} = 17$

Die Zahlen lauten 17, 24, 31.

- Die Lösungen $\langle 17, 24, 31 \rangle$ und $\langle 31, 24, 17 \rangle$ sind zwei verschiedene Folgen, auch wenn es sich in beiden Fällen um die gleichen Zahlen handelt.

Folgen und Reihen

BD **11.11** Begründe jeweils, ob es sich um die Glieder einer arithmetischen Folge handelt.
1) ⟨10,08; 13,01; 15,94; 18,87; 21,8⟩ **2)** ⟨1,1; 1,02; 1,00 3; 1,000 4; 1,000 05⟩ **3)** ⟨5,0; –8,0; 11,0; –14,0; 17,0⟩ **4)** ⟨13,4; 13,4; 13,4; 13,4; 13,4; 13,4⟩

CD **11.12** Gib an, ob es sich bei der gegebenen Folge um eine arithmetische Folge handelt. Formuliere deine Überlegungen mit eigenen Worten.
a) $a_n = 6 - 5n$ **b)** $a_n = n^2 + 3$ **c)** $a_n = 2^n + 7$

B **11.13** Gib die ersten zehn Glieder der Folge an.
1) $a_n = 4n + 3$ **2)** $a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2)$ **3)** $a_{n+1} = a_n - 5$ mit $a_1 = 12$

AB **11.14** Gib das Bildungsgesetz der arithmetischen Folge an.
1) als Rekursionsformel **2)** durch einen erzeugenden Term
a) $a_n = \langle 2; 1,5; 1; 0,5 ...\rangle$ **b)** $a_n = \langle -19; -15; -11 ...\rangle$ **c)** $a_n = \left\langle 3; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3} ...\right\rangle$

B **11.15** Von einer arithmetischen Folge kennt man ein Glied und die Differenz d. Berechne die ersten fünf Glieder dieser Folge.
a) $a_{16} = 56$, $d = 3$ **b)** $a_{24} = 33$, $d = -4$ **c)** $a_{22} = 8$, $d = 0,5$

AB **11.16** Von einer arithmetischen Folge kennt man zwei Glieder. Gib ein Bildungsgesetz an.
a) $a_6 = 8$, $a_9 = 14$ **b)** $a_{17} = 55$, $a_{28} = 11$ **c)** $a_{38} = 24$, $a_{54} = 36$

B **11.17** Die Zahlen a und b sind das erste bzw. das letzte Glied einer endlichen arithmetischen Folge mit z Gliedern. Berechne die fehlenden Glieder.
a) a = 1, b = 10, z = 5 **b)** a = 4, b = 88, z = 7 **c)** a = 90, b = 24, z = 9

ABD **11.18** Die Summe dreier aufeinander folgender Glieder einer arithmetischen Folge ist s, ihr Produkt ist p. Wie lauten diese drei Zahlen? Beschreibe deine Vorgehensweise.
a) s = 3, p = –15 **b)** s = 15, p = 0 **c)** s = –18, p = –162

AB **11.19** Alfred strickt einen Pulloverärmel. Er beginnt mit 40 Maschen und nimmt alle fünf Reihen zwei Maschen auf. Berechne mithilfe einer Folge, wie viele Maschen die 84. Reihe hat.

AB **11.20** Die Längen der Seiten und die Länge der Diagonalen eines Rechtecks bilden eine arithmetische Folge. Berechne den Schnittwinkel der Diagonalen, wenn gilt:
a) längere Seite: 70 cm **b)** kürzere Seite: 243 mm **c)** Diagonale: 172 m

AB **11.21** Berechne mithilfe einer Folge: Wie viele Zahlen zwischen 0 und 10 000 gibt es, die durch
a) 13 teilbar sind? **b)** 4 teilbar sind? **c)** 41 teilbar sind?

AD **11.22** Die Troposphäre ist die unterste Schicht der Erdatmosphäre, sie hat über Mitteleuropa eine „Dicke" von 11 km. Die jeweiligen Temperaturen in dieser Luftschicht entsprechen annähernd einer arithmetischen Folge. Dabei beträgt die mittlere Temperatur auf Meeresniveau 15 °C und in 10 km Höhe –55 °C.
Gib eine Formel an, mit der man die Temperatur in n km Höhe ($n \in \mathbb{N}$) berechnen kann. Formuliere deine Überlegungen mit eigenen Worten.

BD **11.23** Zeige, dass jedes Glied einer arithmetischen Folge als arithmetisches Mittel seiner beiden benachbarten Glieder angeschrieben werden kann.

AB **11.24** Die ersten drei Glieder einer arithmetischen Folge sind ⟨7 – x, 2x – 7, 3x + 5 ...⟩.
1) Berechne x und gib das Bildungsgesetz an. **2)** Berechne die nächsten drei Glieder.

ABD **11.25** Die beiden Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine arithmetische Folge. In welchem Verhältnis stehen die Längen dieser drei Seiten? Beschreibe deine Vorgehensweise.

D **11.26** Beweise, dass für zwei beliebige Glieder einer arithmetischen Folge a_m und a_n ($m > n$) gilt:
$a_m = a_n + (m - n) \cdot d$

11.2.2 Endliche arithmetische Reihen

11.27 Anne-Marie nimmt sich vor, im kommenden Schuljahr viel zu lesen. Sie kauft im September zwei Bücher und will jeden weiteren Monat um zwei Bücher mehr kaufen als im Monat davor.
1) Wie viele Bücher würde sie im Dezember kaufen?
2) Wie viele Bücher würde sie insgesamt bis Ende Juni kaufen?

AB

Man erzählt sich, dass der Volksschullehrer von Carl Friedrich Gauß seinen Schülern sinngemäß folgende Aufgabe stellte:

„Addiert die Zahlen von 1 bis 100. Wie lautet diese Summe?"

Der Lehrer glaubte, dass seine Schützlinge mit dieser umfangreichen Aufgabe einige Zeit beschäftigt wären. Zu seiner Überraschung hatte der Schüler Gauß die Antwort „5 050" sehr schnell parat. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie man dabei vorgehen kann.

Schreibt man die Summe der Zahlen von 1 bis 100 an und ordnet sie um, ergibt sich:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 =$$
$$= \underbrace{1 + 100}_{101} + \underbrace{2 + 99}_{101} + \underbrace{3 + 98}_{101} + \underbrace{4 + 97}_{101} + \ldots + \underbrace{50 + 51}_{101}$$

Es werden 50 Paare gebildet, die jeweils die Summe 101 ergeben. Somit erhält man 50-mal die Summe 101. Man muss also nur $50 \cdot 101 = 5\,050$ berechnen.

Für jede endliche arithmetische Folge kann man die Glieder als Summe anschreiben. So ergibt sich zum Beispiel für die Folge $\langle 1, 3, 5, 7 \rangle$ die Summe $1 + 3 + 5 + 7$. Die angeschriebene Summe nennt man **arithmetische Reihe**, das Ergebnis der Addition $s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ nennt man **Summe der arithmetischen Reihe**.

So wie bei der Addition der Zahlen von 1 bis 100 vorgegangen wurde, kann man bei jeder arithmetischen Reihe vorgehen.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$a_1 + a_n$

$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$

- Man erhält nun $\frac{n}{2}$ Paare, jeweils mit der Summe $(a_1 + a_n)$.

Insgesamt ergibt sich für diese Summe: $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Da $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ ist, gilt ebenso: $s_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n - 1) \cdot d]$

Um den Ausdruck $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ einfacher anschreiben zu können, verwendet man das **Summenzeichen**: $\sum_{k=1}^{n} a_k$ (Σ ... „Sigma", griechischer Großbuchstabe)

Anstelle von „k" kann jeder beliebige Buchstabe verwendet werden, üblich sind zum Beispiel die Buchstaben „i" oder „n".

ZB: $\sum_{i=0}^{5} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Wenn $\langle a_n \rangle$ eine endliche arithmetische Folge ist, nennt man die angeschriebene Summe
$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ eine **endliche arithmetische Reihe**.
Die Summe s_n kann mit $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n - 1) \cdot d]$ berechnet werden.

B **11.28** Gegeben ist die arithmetische Folge $a_n = 36 - 6n$. Berechne s_{45} der zugehörigen endlichen arithmetischen Reihe.

Lösung:

$a_n = 36 - 6n \Rightarrow a_1 = 30, a_{45} = -234$ ● a_1 und a_{45} berechnen

$s_{45} = \frac{45}{2} \cdot (30 - 234) = -4\,590$ ● $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

B **11.29** Gegeben ist die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$. Berechne s_n der zugehörigen endlichen Reihe.
a) $a_n = -7{,}5 + 2{,}5 \cdot n$; s_{14} **b)** $a_n = 84 + (n - 1) \cdot 3$; s_{23} **c)** $a_n = 132 - 2 \cdot n$; s_{60}

B **11.30** Gegeben ist die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \ldots \rangle$. Für welches n der zugehörigen arithmetischen Reihe erhält man die Summe s_n?
a) $\langle a_n \rangle = \langle 7, 9, 11 \ldots \rangle$, $s_n = 280$ **b)** $\langle a_n \rangle = \langle 13, 10, 7 \ldots \rangle$, $s_n = -1\,241$

B **11.31** Die Summe s_n und ein Summand einer arithmetischen Reihe sind gegeben. Gib die Reihe mithilfe des Summenzeichens für n = 20 an.
a) $s_8 = 28$, $a_5 = 5$ **b)** $s_8 = -7$, $a_4 = -1$ **c)** $s_9 = 27$, $a_9 = 15$

Aufgaben 11.32 – 11.35: Berechne die Ergebnisse mithilfe arithmetischer Folgen bzw. Reihen.

AB **11.32** Berechne die Summe aller vierstelligen Zahlen, die durch sieben teilbar sind.

ABC **11.33** Renée will für den Mopedausweis sparen. Sie weiß, dass die Kosten zwischen 220,00 € und 289,00 € betragen werden. Im September wirft sie deshalb 10,00 € in ihre Sparbüchse, jeden weiteren Monat möchte sie um 4,00 € mehr sparen als im Vormonat. Hat sie im darauf folgenden Juni genug gespart? Interpretiere das Ergebnis.

AB **11.34** Bruno, 6 Jahre alt, soll den Umgang mit Geld langsam lernen. Daher bekommt er alle 14 Tage um 10 Cent mehr Taschengeld, mit dem er zwei Wochen auskommen muss. Insgesamt zahlen seine Eltern im ersten Jahr 48,10 € Taschengeld an Bruno. Wie viel Taschengeld bekommt Bruno beim ersten Mal ausbezahlt, wie viel am Ende des Jahres?

AB **11.35** Ein Geldbetrag soll unter den ersten sechs Gewinnern eines Fotowettbewerbs so aufgeteilt werden, dass das Preisgeld für den 1. Platz um 100,00 € höher ist als das für den 2. Platz, dieses um 100,00 € mehr als für den 3. Platz usw.
a) Reichen 15 000,00 € aus, wenn das Preisgeld für den 1. Platz 2 750,00 € beträgt?
b) Wie hoch ist das Preisgeld für die ersten drei Plätze jeweils, wenn der insgesamt zur Verfügung gestellte Geldbetrag 10 000,00 € beträgt?

D **11.36** Erkläre mit eigenen Worten, wie viele der Größen a_1, a_n, n, d und s_n einer arithmetischen Folge bekannt sein müssen, damit die Folge und die zugehörige Reihe vollständig bestimmt sind.

B **11.37** Zwei Summen einer endlichen arithmetischen Reihe mit insgesamt zehn Gliedern sind gegeben. Gib die Reihe
1) als angeschriebene Summe, **2)** mithilfe des Summenzeichens an.
a) $s_3 = 24$, $s_7 = 98$ **b)** $s_4 = -22$, $s_8 = 52$ **c)** $s_6 = -33$, $s_{10} = -103$

B **11.38** Die Summe s_5 einer endlichen arithmetischen Reihe ist fünf. Das Produkt aus dem zweiten und dem dritten Summanden ist (–14). Gib die fehlenden Summanden an.

AB **11.39** Ein Freilufttheater soll mit 1 350 Plätzen in 25 Reihen ausgestattet werden. Dabei befinden sich in jeder Reihe um drei Plätze mehr als in der vorhergehenden. Die Eigentümer möchten (rund) ein Drittel der Plätze als teure Parkettplätze anbieten. Ab welcher Reihe beginnen somit die günstigeren Parterreplätze?

11.3 Geometrische Folgen und Reihen

11.3.1 Geometrische Folgen

AB

11.40 Im Science-Fiction-Film „Andromeda – tödlicher Staub aus dem Weltall", nach dem gleichnamigen Roman von Michael Crichton (1942 – 2008), landet ein kristalliner Organismus auf der Erde, der jede Form von Energie verwerten kann. Dieser Organismus bedeckt ursprünglich eine Fläche von 10^{-6} m². Durch sein Wachstum verdoppelt sich die von ihm bedeckte Fläche alle zwei Minuten. Welche Fläche wäre nach einer Stunde bedeckt? Wie lang würde es dauern, bis dieser Organismus die Fläche Nordamerikas, $25 \cdot 10^6$ km², bedeckt?

Betrachtet man zum Beispiel die Folge ⟨3, 6, 12, 24, 48 ...⟩, so erkennt man:

- Multipliziert man ein Glied mit 2, so erhält man das nächste Glied.
- Jedes Glied lässt sich mithilfe einer Potenz von 2 angeben: $3 = 3 \cdot 2^0$, $6 = 3 \cdot 2^1$, $12 = 3 \cdot 2^2$ ...
- Der Quotient zweier benachbarter Glieder ist konstant, es gilt: $\frac{3 \cdot 2^1}{3 \cdot 2^0} = \frac{3 \cdot 2^2}{3 \cdot 2^1} = ... = 2$

Folgen, bei denen der Quotient q zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist, nennt man **geometrische Folgen**. Für das Bildungsgesetz der Folge ⟨3, 6, 12, 24, 48 ...⟩ gilt:

$b_1 = 3$
$b_2 = b_1 \cdot 2 = 3 \cdot 2^1 = 6$
$b_3 = b_2 \cdot 2 = b_1 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 12$
$b_4 = b_3 \cdot 2 = b_1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 24$
Allgemein: $b_{n+1} = b_n \cdot 2$ mit $b_1 = 3$ bzw. $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Haben die Glieder einer Folge abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, so bezeichnet man eine solche Folge als **alternierende Folge**. Dies ist zum Beispiel bei einer geometrischen Folge mit $q < 0$ der Fall.

Eine Folge heißt **geometrische Folge** $\langle b_n \rangle$, wenn der **Quotient q** zweier aufeinander folgender Glieder **konstant** ist: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Das Bildungsgesetz einer geometrischen Folge kann angegeben werden

als Rekursionsformel:	durch einen erzeugenden Term:
$b_{n+1} = b_n \cdot q$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Vergleicht man die Glieder einer arithmetischen Folge, zB $a_n = 3 + 1{,}2 \cdot (n - 1)$, mit den Gliedern einer geometrischen Folge, zB $b_n = 3 \cdot 1{,}2^{(n-1)}$, so zeigt die grafische Darstellung den unterschiedlichen Verlauf der beiden Funktionsgraphen deutlich auf:

Die **arithmetische Folge** wächst **linear**, da immer der gleiche Wert **addiert** wird.

Die **geometrische Folge** wächst **exponentiell**, da immer mit dem gleichen Wert **multipliziert** wird.

AB **11.41** Gib zwei Bildungsgesetze der geometrischen Folge $\langle b_n \rangle = \langle 10; 15; 22{,}5 \ldots \rangle$ an.

Lösung:

$b_1 = 10$ und $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{15}{10} = 1{,}5$

$b_{n+1} = b_n \cdot 1{,}5$ mit $b_1 = 10$ oder

$b_n = 10 \cdot 1{,}5^{n-1}$

● q kann auch mit $q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{22{,}5}{15}$ berechnet werden.

BC **11.42** Von einer geometrischen Folge kennt man die Glieder $\langle b_n \rangle = \langle 7{,}5; 30; 120; 480 \ldots \rangle$.

1) Berechne das neunte Glied dieser Folge.

2) Welche Glieder der Folge sind größer als 15 000?

Lösung:

1) $b_1 = 7{,}5$ und $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{30}{7{,}5} = 4$

$b_n = 7{,}5 \cdot 4^{n-1}$

$b_9 = 7{,}5 \cdot 4^{9-1} = 7{,}5 \cdot 4^8$

$b_9 = 491\,520$

2) $15\,000 < 7{,}5 \cdot 4^{n-1}$

$2\,000 < 4^{n-1}$

$\ln(2\,000) < (n-1) \cdot \ln(4) \Rightarrow n > 6{,}482\ldots$

Das 7. Glied und alle weiteren Glieder sind größer als 15 000.

● Da der Exponent gesucht ist, wird die Gleichung logarithmiert.

B **11.43** Das 1. Glied einer endlichen geometrischen Folge mit $q > 0$ ist 2, das 5. Glied ist 40. Berechne die dazwischen liegenden Glieder, runde auf zwei Dezimalstellen.

Lösung:

$b_1 = 2$ und $b_5 = 40$

$b_5 = b_1 \cdot q^4$

$q^4 = \frac{b_5}{b_1} = 20 \Rightarrow q = \sqrt[4]{20}$

$b_2 = 2 \cdot \sqrt[4]{20} = 4{,}229\ldots \approx 4{,}23$

$b_3 = 2 \cdot (\sqrt[4]{20})^2 = 8{,}944\ldots \approx 8{,}94$

$b_4 = 2 \cdot (\sqrt[4]{20})^3 = 18{,}914\ldots \approx 18{,}91$

Die Folge lautet $\langle 2; 4{,}23; 8{,}94; 18{,}91; 40 \rangle$.

B **11.44** Von einer geometrischen Folge kennt man ein Glied und den Quotienten q. Berechne die ersten fünf Glieder dieser Folge und das erste Folgeglied, das größer als 10^q ist.

a) $b_6 = 11\,664$, $q = 3$ ***b)*** $b_8 = 312\,500$, $q = 5$ ***c)*** $b_{12} = 2\,176\,782\,336$, $q = 6$

AB **11.45** Von einer geometrischen Folge kennt man zwei Glieder. Gib das Bildungsgesetz als Rekursionsformel und mithilfe eines erzeugenden Terms an.

a) $b_6 = 224$, $b_{16} = 229\,376$ ***b)*** $b_6 = 2$, $b_{12} = 2 \cdot 10^{-6}$ ***c)*** $b_5 = -2\,560$, $b_{10} = 2\,621\,440$

ABD **11.46** Drei Zahlen bilden eine geometrische Folge. Ihre Summe ist s, ihr Produkt ist p. Wie lauten die drei Zahlen? Beschreibe deine Vorgehensweise.

a) $s = 175{,}5$; $p = 91\,125$ ***b)*** $s = 105{,}3$; $p = 14\,348{,}907$ ***c)*** $s = 99{,}2$; $p = 4\,096$

AD **11.47** Gib ein Beispiel für eine Folge an, die sowohl eine arithmetische als auch eine geometrische Folge darstellt. Begründe deine Wahl.

11.48 Berechne b_1 und q, wenn für eine geometrische Folge gilt:
a) $b_2 + b_4 = 45$ und $b_3 + b_4 = 54$ ***b)*** $b_1 + b_4 = 21$ und $b_2 + b_5 = -42$

B

11.49 Drei aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Folge $2x + 10$; $9x + 25$; $45x - 35$ sind gegeben. Berechne x sowie die Zahlenwerte der gegebenen und der nächsten drei Glieder.

AB

11.50 $\langle a, b, c\rangle$ ist eine arithmetische und $\langle b, a, c\rangle$ eine geometrische Folge. Berechne a und b.
a) $c = 116$ ***b)*** $c = -272$ ***c)*** $c = 880$

AB

11.51 Eine Schlagbohrmaschine erreicht zwischen 860 und 2 120 Umdrehungen pro Minute. Mithilfe einer sechsteiligen Skala sollen verschiedene Umdrehungen pro Minute gewählt werden können. Dabei sollen die sechs Werte eine geometrische Folge darstellen. Wie viele Umdrehungen pro Minute entsprechen den sechs Einstellungen?

ABC

11.52 Eine Mutter vermacht ihren fünf Kindern ein Vermögen von 100 000,00 €. Jedes Kind soll 1,2-mal mehr als sein älteres Geschwisterkind bekommen. Wie viel Geld erhält jedes Kind?

AB

11.53 Zeige folgenden Satz: Die Logarithmen der Glieder einer geometrischen Folge bilden eine arithmetische Folge.

D

11.54 Zeige, dass jedes Glied einer geometrischen Folge als geometrisches Mittel seiner beiden benachbarten Glieder angeschrieben werden kann.

D

11.55 Ein Gummiball wird aus einer Höhe von 1,80 m fallen gelassen, fällt auf den Boden, steigt wieder, fällt, steigt wieder usw. Aufgrund der geringen Elastizität verliert der Ball durch jeden Aufschlag $\frac{1}{8}$ an Höhe. Der Vorgang gilt als beendet, wenn die Ballhöhe weniger als 0,1 mm beträgt. Beantworte dies mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.
1) Wie oft steigt der Ball in die Höhe?
2) Welchen Weg legt er insgesamt zurück?

ABC
TE

11.56 Bei der gleichstufigen Stimmung wird jede Oktave mit dem Frequenzverhältnis 1 : 2 in zwölf gleich große Intervalle geteilt, wie dies zum Beispiel bei modern gestimmten Klavieren der Fall ist. Die Tastenfolge von c′ bis c″ besteht aus den Tönen c′ – cis′ – d′ – dis′ – e′ – f′ – fis′ – g′ – gis′ – a′ – ais′ – h′ – c″, wobei die Frequenzen der Töne eine geometrische Folge bilden. Berechne die Frequenzen der Töne, wenn a′ [sprich: „eingestrichenes a“] eine Frequenz von 440 Hz hat.

AB

11.57 Das Cent (latein: „centum“ = hundert) ist eine Maßeinheit für Intervalle in der Musik. Eine Oktave umfasst 12 Halbtöne und jeder Halbton ist in 100 Cent unterteilt. Die Frequenz des Kammertons a′ [sprich: „eingestrichenes a“] beträgt 440 Hz, die Frequenzen der nächsten Oktaven sind 880 Hz für a″ bzw. 1 760 Hz für a‴. Berechne den Faktor, der das Frequenzverhältnis eines Tonunterschieds von einem Cent angibt. Formuliere deine Überlegungen mit eigenen Worten.

ABD

11.58 Welchen Einfluss hat der Parameter d bzw. q auf den Verlauf einer Folge?
Vergleiche mithilfe von Technologieeinsatz, wie sich der Verlauf jeweils ändert, wenn man den Parameter schrittweise um 0,1 verändert. Stelle die Glieder für 5 Werte von d bzw. q grafisch dar. Beschreibe den Einfluss mit eigenen Worten.
1) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 1{,}1$; d wird vergrößert bzw. verkleinert
2) $b_n = 2 \cdot 1{,}1^{(n-1)}$; q wird vergrößert bzw. verkleinert

BD
TE

11.3.2 Normzahlreihen

BD **11.59** Eine Firma stellt Schraubenmuttern her. Der Durchmesser der kleinsten Mutter beträgt $d_k = 10$ mm, der Durchmesser der größten Mutter beträgt $d_g = 30$ mm.
Wähle als Durchmesser für die mittlere Mutter
1) das arithmetische Mittel und ***2)*** das geometrische Mittel der beiden Werte.
Zeichne die drei Schraubenmuttern für ***1)*** und ***2)*** im Maßstab 1 : 1 auf.
Welcher Fall entspricht eher deinem Gefühl für „gleichmäßig" wachsend? Begründe deine Entscheidung.

Um in der Praxis zum Beispiel Serien unterschiedlich dimensionierter Schrauben herzustellen, wählt man für die Schraubendurchmesser eine geometrische Folge. Der Vergrößerungsfaktor bleibt dabei – abhängig von der Genauigkeit der Messungen – annähernd konstant. Diese Abstufungen entsprechen eher dem natürlichen Empfinden von gleichmäßiger Verteilung als die Abstufungen bei einer arithmetischen Folge, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Zeichnet man Kreise, deren Durchmesser immer um (annähernd) denselben Faktor wachsen, zum Beispiel 10, 16, 25, 40, 63 und 100 Einheiten, so können diese so nebeneinander angeordnet werden, dass sie zwei gemeinsame Tangenten haben. Diese Durchmesser verhalten sich annähernd wie die Glieder der geometrischen Folge $b_n = 10 \cdot 1{,}6^{n-1}$.

Zeichnet man hingegen Kreise, deren Durchmesser sich um eine konstante Differenz unterscheiden, zum Beispiel 10, 28, 46, 64, 82, 100 Einheiten, und ordnet diese Kreise nebeneinander an, so vermitteln diese Kreise kein Gefühl von gleichmäßigem Wachstum.
In diesem Fall entsprechen die Durchmesser der arithmetischen Folge $a_n = 10 + (n - 1) \cdot 18$.

Um zum Beispiel regelmäßig abgestufte Bauteile herzustellen, verwendet man die so genannten **Normzahlreihen** Rm, wobei m die Anzahl der Abstufungen angibt. Das Wort „Reihe" wird hier umgangssprachlich und nicht im mathematischen Sinn verwendet.
Die Normzahlen gehen auf Charles Renard (französischer Luftfahrtpionier, 1847 – 1905) zurück, der dieses System zur besseren Einteilung von Seilen und Kabeln entwickelte.

Normzahlreihen sind geometrische Folgen mit einer vorgegebenen Anzahl (m + 1) von Gliedern und dem **Stufensprung** q_m. Zum Beispiel hat die Normzahlreihe R5 mit $b_1 = 1$ und $b_6 = 10$ fünf Abstufungen, nämlich ⟨1,00; 1,60; 2,50; 4,00; 6,30; 10,00⟩, wobei die Werte mit zwei Dezimalstellen angegeben werden. Hier ist der Stufensprung $q_5 = \sqrt[5]{10}$. Für die Anzahl m der Abstufungen werden üblicherweise die Zahlen 5, 10, 20 oder 40, in Ausnahmefällen auch 80, verwendet. Die zugehörigen Folgen werden mit „R5", „R10", „R20", „R40" bzw. „R80" bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass in der Praxis üblicherweise nicht mit den Genauwerten, das sind die auf vier Dezimalstellen gerundeten theoretischen Werte, sondern mit gerundeten bzw. stark gerundeten Werten, den Haupt- bzw. Rundwerten, gearbeitet wird.

Als erstes Glied einer Normzahlreihe kann jede beliebige Zehnerpotenz gewählt werden. Werden von einer Normzahlreihe nur bestimmte Zahlen verwendet, spricht man von **abgeleiteten Normzahlreihen**. Zum Beispiel bedeutet „R10/2 (10 ... 400)", dass R10 mit $b_1 = 10$ begonnen und bis 400 fortgesetzt wird. Dabei wird nur jedes zweite Glied der Folge verwendet. Der Stufensprung beträgt dann $q = (\sqrt[10]{10})^2$.

Als **Normzahlreihe** Rm werden die (gerundeten) Werte der Glieder einer geometrischen Folge mit $b_1 = 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$ und dem Stufensprung $q_m = \sqrt[m]{10}$ bezeichnet.
Normzahlreihen werden üblicherweise für m = 5, 10, 20 und 40 erstellt.

11.60 **1)** Berechne die ersten zehn Glieder der Folge $b_{n+1} = b_n \cdot \sqrt[20]{10}$, beginne bei $b_1 = 1$. Gib jeweils den Genauwert an.
2) Gib die ersten fünf Glieder der Normzahlreihe R10/2 an, beginne bei $b_1 = 10$. Runde auf ganze Zahlen.

B

Lösung:

1) $q_{20} = \sqrt[20]{10} = 1{,}122...$

$b_1 = 1{,}000$ $b_2 = 1{,}122\,0$ $b_3 = 1{,}258\,9$ $b_4 = 1{,}412\,5$ $b_5 = 1{,}584\,9$

$b_6 = 1{,}778\,3$ $b_7 = 1{,}995\,3$ $b_8 = 2{,}238\,7$ $b_9 = 2{,}511\,9$ $b_{10} = 2{,}818\,4$

2) $q_{10} = \sqrt[10]{10} \Rightarrow q_{10}^{\ 2} = (\sqrt[10]{10})^2 = 1{,}584...$

$b_1 = 10$ $b_2 = 16$ $b_3 = 25$ $b_4 = 40$ $b_5 = 63$

11.61 Berechne den Faktor $q_m = \sqrt[m]{10}$ für die angegebene Normzahlreihe.
a) R5 **b)** R10 **c)** R20 **d)** R40

B

Aufgaben 11.62 – 11.63: Arbeite jeweils mit den Genauwerten.

11.62 Berechne den prozentuellen Wertezuwachs bei der abgeleiteten Normzahlreihe.
a) R10/3 **b)** R20/4 **c)** R10/5 **d)** R40/8

B

11.63 Ein Unternehmen will m Bauteile produzieren, deren Größen zwischen den beiden angegebenen Werten liegen sollen. Wie sind die Bauteile zu dimensionieren?
a) R5 (10 cm ... 50 cm) **b)** R20 (100 mm ... 200 mm) **c)** R10 (0,1 m ... 0,5 m)

ABC

11.64 **1)** Berechne die Genauwerte von R40 mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.
2) Suche in der Fachliteratur bzw. in Tabellenbüchern nach den Hauptwerten und Rundwerten von R40. Berechne die jeweilige prozentuelle Abweichung der Werte von den Genauwerten. Interpretiere das Ergebnis.

BC

TE

11.65 Zeige, dass die Genauwerte der Normzahlreihe R40/6 annähernd den Abmessungen der Seitenlängen der Papierformate A5 bis A0 entsprechen.

D

11.3.3 Endliche geometrische Reihen

AB **11.66** Für die Finalrunde einer Fußballweltmeisterschaft sind 16 Mannschaften qualifiziert. Diese spielen im K.-o.-System um den Weltmeistertitel. Wie viele Spiele finden insgesamt statt, bevor im Endspiel der Weltmeister ermittelt wird? Schreibe die Rechnung an.

Bildet man aus den Gliedern einer endlichen geometrischen Folge eine Summe, so erhält man eine **endliche geometrische Reihe**: $\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1}$

Für die Summe s_n einer endlichen geometrischen Reihe kann eine Formel erstellt werden:

$$\begin{aligned} \text{I: } s_n &= b_1 + b_1 \cdot q + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} \\ \text{II: } s_n \cdot q &= \quad\; b_1 \cdot q + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n \\ \hline s_n - s_n \cdot q &= b_1 \qquad\qquad\qquad\qquad - b_1 \cdot q^n \end{aligned}$$

$$s_n \cdot (1 - q) = b_1 \cdot (1 - q^n)$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- Gleichung II ergibt sich durch Multiplikation von Gleichung I mit q.
- Die zweite Gleichung wird von der ersten Gleichung abgezogen.
- s_n bzw. b_1 herausheben

Wenn $\langle b_n \rangle$ eine endliche geometrische Folge ist, nennt man die angeschriebene Summe $\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n$ eine **endliche geometrische Reihe**.
Die Summe s_n kann mit $s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ bzw. $s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ berechnet werden.

Ist $|q| < 1$, so verwendet man üblicherweise: $s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Ist $|q| > 1$, verwendet man auch: $s_n = b_1 \cdot \frac{(-1) \cdot (1 - q^n)}{(-1) \cdot (1 - q)} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

B **11.67** Gegeben sind die ersten drei Glieder $\langle 8; 1{,}6; 0{,}32 \ldots \rangle$ einer geometrischen Folge. Berechne s_7 der zugehörigen geometrischen Reihe.

Lösung:

$b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1{,}6}{8} = 0{,}2$ — q berechnen

$s_7 = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 8 \cdot \frac{1 - 0{,}2^7}{1 - 0{,}2} = 9{,}999\,872$ — s_7 mithilfe der Formel berechnen

B **11.68** Gegeben sind jeweils die ersten drei Glieder einer endlichen geometrischen Folge. Berechne s_n der zugehörigen geometrischen Reihe.

a) $\langle 120; 90; 67{,}5 \ldots \rangle$, s_5 **b)** $\langle -9, 12, -16 \ldots \rangle$, s_7 **c)** $\langle 5, \sqrt{5}, 1 \ldots \rangle$, s_{10}

ABD **11.69** Jasmin erzählt Robin, Erin und Andrea eine Neuigkeit. Die drei erzählen diese innerhalb einer Stunde jeweils drei Personen weiter, usw.

TE

1) Stelle die Anzahl der Personen, die innerhalb von fünf Stunden jeweils stündlich informiert werden, grafisch dar.

2) Zeichne in das gleiche Koordinatensystem die Gesamtanzahl der informierten Personen ab der 1. bis zur 5. Stunde ein. Beschreibe den Verlauf der beiden Graphen.

AD **11.70** Gib eine Formel an, mit der die Anzahl deiner Vorfahren (Eltern, Großeltern, ...) vor n Generationen berechnet werden kann. Formuliere deine Überlegungen.

11.71 Gib s_6 der endlichen geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{6} \frac{4}{2^{n-1}}$ als Bruchzahl an. B

11.72 Die Summe s_6 einer endlichen geometrischen Reihe ist neunmal so groß wie s_3. Quadriert man q, so erhält man den Wert des dritten Glieds der zugehörigen endlichen geometrischen Folge. Gib die sechs Glieder dieser Folge an. AB

11.73 Eine Erbschaft von 150 000,00 € soll so auf vier Personen aufgeteilt werden, dass die jüngste doppelt so viel wie die zweitjüngste erhält usw. Welchen Betrag erhält jede Person? AB

11.74 Karin möchte regelmäßig spazieren gehen. Sie geht am Montag 1 km und an jedem folgenden Tag um 10 % mehr als am vorhergehenden Tag. Wann geht sie das erste Mal eine Strecke, die länger als 5 km ist? Wie viele km hat sie bis dahin insgesamt zurückgelegt? AB

11.75 Eine Strecke von 1 200 m soll so in sieben Teile geteilt werden, dass jeder Teil 1,3-mal so lang wie der unmittelbar vorhergehende Teil ist. Gib die Längen der Teilstrecken an, runde auf Zentimeter. AB

11.76 Als Erfinder des Schachspiels gilt der Legende nach Sissa ibn Dahir (auch Sessa genannt), der wahrscheinlich um 300 n. Chr. in Indien lebte. Man erzählt sich, dass er als Belohnung für diese Erfindung die Summe Weizenkörner erbat, die sich ergibt, wenn man auf das erste Schachbrettfeld ein Weizenkorn, auf das zweite Feld zwei Körner, auf das dritte vier, auf das vierte acht Körner usw. legt. ABD
Welche Schwierigkeiten ergaben sich bei der Auszahlung dieser Belohnung?
Verwende zur Beantwortung folgende Informationen: Die Tausendkornmasse für Weizen beträgt im Mittel 40 g bis 65 g; die Welternte 2010 betrug 651 Millionen Tonnen.

11.77 Julian hat fünf Bauklötze, die (annähernd) würfelförmig sind, immer kleiner werden und unten offen sind. Der größte Würfel hat eine Kantenlänge von 10 cm. Jeder weitere Würfel hat eine um 10 % kleinere Kantenlänge als der vorherige. AB

1) Wie hoch ist der Turm?

2) Die Würfel sind aus Kunststoff mit der Dichte $\rho = 1{,}5\ \frac{g}{cm^3}$ angefertigt. Die Wanddicke beträgt im Mittel d = 2 mm. Wie viel Gramm Kunststoff benötigt man für die Herstellung?

11.78 Eine Aufgabe aus lang vergangener Zeit: AB
Christoff Rudolff: „die Coss Christoffs Rudolffs“, Königsperg 1553

Ein roſs wirt hingegeben in Etſchland, [Etſch: Fluſs in Südtirol], iſt der Kauf geſtellt auf die 32 Huffnegel, alſo das man für den erſten nagel ſol legen 1 paradeinlein (thun 20 paradeinlein 1 creutzer), für den anderen 2, für den dritten 4, und ſo fort das ye ein nagel zwiret ſo tewr zalt werde als der nechſt davor. Iſt die frag, wie tewr das roſs hinkompt?

11.4 Zinsrechnung

11.4.1 Einfache Zinsrechnung

Der **Barwert K_0** (Anfangswert, Anfangskapital) ist der Wert eines Kapitals zu Beginn des Verzinsungszeitraums. Der **Zinssatz $i = \frac{p}{100} = p\,\%$** gibt an, um welchen Prozentsatz der Barwert in einem Zeitraum von einem Jahr wächst. Die **Zinsen Z** für ein Jahr sind $Z = K_0 \cdot i$. Für Beträge, die innerhalb von 14 Tagen nach ihrer Einzahlung wieder abgehoben werden, werden keine Zinsen ausbezahlt. Werden die Zinsen nach weniger als einem Jahr behoben, so reduziert sich ihre Höhe entsprechend. Der Änderungsfaktor hängt von der Verzinsungsdauer ab, wobei jeder Monat unabhängig von seiner tatsächlichen Dauer mit 30 Tagen gerechnet wird (Bundesgesetz über das Bankwesen, BGBl. Nr. 532/1993; §32 Abs. 7). Die Summe aus dem Barwert und den Zinsen wird **Endwert K_n** (Endkapital) genannt. Das Berechnen des Endwerts wird „aufzinsen", die Berechnung des Barwerts aus dem Endwert wird „abzinsen" genannt.

Einfache Zinsen Z:

$Z_n = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = K_0 \cdot i \cdot n$

$K_n = K_0 + Z_n$

K_0 ... Barwert, $i = p\,\%$ ... Zinssatz
n ... Verzinsungsdauer in Jahren
K_n ... Endwert

Da bei **einfachen Zinsen** immer der gleiche Betrag zum Kapital addiert wird, entspricht dieses Verzinsungsmodell einer **arithmetischen Folge** beginnend mit $n = 0$. In der Praxis werden einfache Zinsen nur unterjährig, das heißt, innerhalb eines Kalenderjahrs, angewendet.

In diesem Abschnitt werden einige Vereinfachungen getroffen. Zum Beispiel wechselt bei täglich fälligen Sparbüchern der Zinssatz in unregelmäßigen Abständen. Auch beinhaltet der Zinssatz i die **Kapitalertragsteuer** (**KESt**), diese lag 2012 bei 25 %. Sie wird nach Berechnung der Zinsen von diesen abgezogen und dem Finanzamt zugeführt, wodurch sich der tatsächliche Zinsertrag um 25 % reduziert. In der Praxis und daher auch in diesem Abschnitt ist immer der Zinssatz i angegeben und die Aufgaben werden ohne Berücksichtigung der KESt mit dem gegebenen Zinssatz berechnet, falls nicht anders angegeben. Nebenkosten, die zum Beispiel bei Krediten anfallen können, bleiben hier ebenfalls unberücksichtigt.

B **11.79** Ein Kapital von 570,00 € wird bei einer Verzinsung von $i = 1{,}8\,\%$ angelegt. Wie hoch sind die Zinsen, wenn sie nach der angegebenen Verzinsungsdauer abgehoben werden?

a) ein Jahr ***b)*** neun Monate ***c)*** 135 Tage

Lösung:
$1{,}8\,\% = 0{,}018$

a) $Z = K_0 \cdot i = 570{,}00\,€ \cdot 0{,}018 = 10{,}26\,€$
Die Zinsen betragen 10,26 €.

b) $Z = K_0 \cdot i \cdot n = 570{,}00\,€ \cdot 0{,}018 \cdot \frac{3}{4} = 7{,}695\,€$
Die Zinsen betragen 7,70 €.

- 9 Monate = $\frac{3}{4}$ Jahr

c) $Z = K_0 \cdot i \cdot n = 570{,}00\,€ \cdot 0{,}018 \cdot \frac{135}{360} = 3{,}847\,5\,€$
Die Zinsen betragen 3,85 €.

- 1 Jahr = 360 Tage

11.80 Welcher Barwert erbringt bei einer einfachen Verzinsung von i = 3,75 % in einer Verzinsungsdauer von 8 Monaten Zinsen in der Höhe von 75,00 € vor Abzug der KESt? B

Lösung:
$Z = K_0 \cdot i \cdot n \Rightarrow K_0 = \frac{Z}{i \cdot n} = \frac{75{,}00\text{ €}}{0{,}0375 \cdot \frac{8}{12}} = 3\,000{,}00\text{ €}$

Der Barwert beträgt 3 000,00 €.

11.81 Berechne die Höhe der Zinsen nach der Verzinsungsdauer t. B

a) K_0 = 350,00 €; t = 1 Jahr; i = 3,2 % **c)** K_0 = 300,00 €; t = 275 Tage; i = 4 %
b) K_0 = 200,00 €; t = 210 Tage; i = 1,5 % **d)** K_0 = 600,00 €; t = 2 Monate; i = 4,25 %

11.82 Berechne den Zinssatz, wenn die Zinsen vor Abzug der KESt angegeben sind. B

a) K_0 = 150,00 €; t = 165 Tage; Z = 2,40 € **b)** K_0 = 300,00 €; t = 4 Monate; Z = 4,08 €

11.83 Berechne die Verzinsungsdauer in Tagen. B

a) K_0 = 500,00 €; Z = 5,25 €; i = 1,75 % **b)** K_0 = 450,00 €; Z = 12,80 €; i = 5,125 %

11.84 Ein täglich fälliges Sparbuch wurde am 2. Jänner mit einer Einmaleinzahlung von K_0 eröffnet. Die Verzinsung begann am nächsten Werktag, dem 3. Jänner und endete am Tag der Schließung des Sparbuchs. Berechne die Höhe des Zinssatzes i, wenn AB

a) 250,00 € eingezahlt und am 3. Mai 255,00 € ausbezahlt wurden.
b) 400,00 € eingezahlt und am 31. Oktober 437,00 € ausbezahlt wurden.
c) 800,00 € eingezahlt und am 10. Jänner unverändert ausbezahlt wurden.

11.85 Wie lang muss man einen Barwert K_0 bei einem Zinssatz i anlegen, damit die jährlich abgehobenen Zinsen in Summe den gleichen Wert wie der Barwert erlangen? AB

a) 1,75 % **b)** 2,25 % **c)** 4 % **d)** 6,5 %

11.4.2 Zinseszinsrechnung

Bei vielen Sparformen werden Zinsen nicht innerhalb oder am Ende eines Jahrs ausbezahlt, sondern verbleiben auf dem Sparbuch und werden zum Barwert hinzugezählt. Dadurch fallen im nächsten Jahr nicht nur für den Barwert, sondern auch für diese Zinsen wieder Zinsen an.

$K_1 = K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + i)$

- K_0 ... Anfangskapital, K_1 ... Kapital nach einem Jahr

$K_2 = K_1 + Z_2 = K_0 \cdot (1 + i) + K_0 \cdot (1 + i) \cdot i =$
$= K_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^2$

- Zur Berechnung von K_2 werden zu K_1 die Zinsen Z_2 des 2. Jahrs hinzugezählt.

$K_3 = K_2 + Z_3 = K_0 \cdot (1 + i)^2 + K_0 \cdot (1 + i)^2 \cdot i =$
$= K_0 \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^3$

- Das Kapital K_3 nach drei Jahren wird analog wie K_2 berechnet, ebenso K_4, K_5 usw.

Das Sparguthaben wächst exponentiell, das Modell der **Zinseszinsrechnung** entspricht somit einer **geometrischen Folge**.

Der Wachstumsfaktor (1 + i) heißt **Aufzinsungsfaktor** und wird häufig mit q oder r bezeichnet. Die Verzinsung erfolgt jeweils für ein Jahr, was sich im Zusatz p. a. (italienisch: „per anno" = für ein Jahr) bei der Angabe des Zinssatzes widerspiegelt.

Berechnung des Endwerts mithilfe der Zinseszinsrechnung:
$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$ K_n ... Endwert nach n Jahren Verzinsungsdauer

BC **11.86** Bei der Geburt von Marie möchten ihre Eltern ein Sparbuch anlegen, das an ihrem 18. Geburtstag einen Auszahlungsbetrag von 10 000,00 € aufweisen soll. Wie hoch muss der Barwert sein, wenn der Zinssatz $4\frac{7}{8}$ % beträgt und keine weiteren Einlagen mehr erfolgen? Welchen Betrag zahlen die Eltern vermutlich ein?

Lösung:

$4\frac{7}{8}\,\% = 0{,}048\,75$ ● Zinssätze werden oft als gemischte Brüche angegeben.

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n \;\Rightarrow\; K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$

$K_0 = \frac{10\,000{,}00\,€}{(1 + 0{,}048\,75)^{18}} = 4\,245{,}261...\,€ \approx 4\,245{,}26\,€$

Der Barwert beträgt 4 245,26 €. Die Eltern werden 4 250,00 € einzahlen.

B **11.87** Berechne den Aufzinsungsfaktor q.

1) ohne Berücksichtigung der KESt ***2)*** mit Berücksichtigung der KESt

a) $i = 1{,}5\,\%$ ***b)*** $i = 2{,}125\,\%$ ***c)*** $i = 3{,}75\,\%$ ***d)*** $i = 4{,}375\,\%$

B **11.88** Berechne den Endwert, wenn der Barwert zu einem fixen Zinssatz n Jahre lang verzinst wird.

a) $K_0 = 3\,500{,}00\,€;\; i = 1{,}5\,\%;\; n = 15$ ***c)*** $K_0 = 25\,000{,}00\,€;\; i = 4{,}5\,\%;\; n = 25$

b) $K_0 = 250{,}00\,€;\; i = 2{,}125\,\%;\; n = 10$ ***d)*** $K_0 = 50{,}00\,€;\; i = 3\,\%;\; n = 5$

B **11.89** Ein Kapital K_0 ist nach n Jahren auf einen Betrag von K_n angewachsen. Berechne den Aufzinsungsfaktor q und den Zinssatz i.

a) $K_0 = 5\,000{,}00\,€;\; K_n = 10\,406{,}30\,€;\; n = 14$ ***c)*** $K_0 = 20\,000{,}00\,€;\; K_n = 22\,987{,}52\,€;\; n = 12$

b) $K_0 = 540{,}00\,€;\; K_n = 650{,}23\,€;\; n = 10$ ***d)*** $K_0 = 1\,280{,}00\,€;\; K_n = 1\,456{,}39\,€;\; n = 6$

BC **11.90** Wie viele Jahre muss ein Barwert $K_0 = 700{,}00\,€$ verzinst werden, damit er bei einem Zinssatz von $i = 2{,}65\,\%$ auf einen Betrag von mindestens $K_n = 900{,}00\,€$ anwächst? Berücksichtige die KESt.

Lösung:

$i_{Netto} = 0{,}75 \cdot 2{,}65\,\% = 1{,}987\,5\,\%$ ● Die KESt beträgt 25 %.

$900{,}00\,€ = 700{,}00\,€ \cdot (1 + 0{,}019\,875)^n \;\Rightarrow\; 900{,}00\,€ = 700{,}00\,€ \cdot 1{,}019\,875^n$

$\frac{900{,}00\,€}{700{,}00\,€} = 1{,}019\,875^n$

$\ln\left(\frac{9}{7}\right) = n \cdot \ln(1{,}019\,875)$

$n = \frac{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}{\ln(1{,}019\,875)} = 12{,}769... \approx 13$ Der Barwert muss 13 Jahre verzinst werden.

BC **11.91** Wie lang muss ein Barwert K_0 verzinst werden, damit er bei einem Zinssatz i auf einen Betrag K_n anwächst? Berücksichtige die KESt.

a) $K_0 = 2\,200{,}00\,€;\; K_n = 2\,968{,}92\,€;\; i = 4{,}375\,\%$

b) $K_0 = 18\,500{,}00\,€;\; K_n = 41\,085{,}19\,€;\; i = 6{,}875\,\%$

c) $K_0 = 150{,}00\,€;\; K_n = 159{,}36\,€;\; i = 1{,}525\,\%$

AB **11.92** Anton hat ein Sparbuch mit einem fixen Zinssatz i mit einer einmaligen Einlage von 1 500,00 € angelegt. 25 Jahre später löst er das Sparbuch auf und stellt fest, dass sich der Barwert verdoppelt hat. In welcher Zeit hätte sich der Barwert verdoppelt, wenn der Zinssatz

a) um 1 % höher gewesen wäre? ***b)*** um 0,5 % niedriger gewesen wäre?

11.93 Ein Anfangskapital von 5 000,00 € wird drei Jahre zu 6 %, dann fünf Jahre zu 3,125 % und anschließend zwei Jahre zu 4,5 % angelegt. Wie hoch ist der Endwert? Dokumentiere deine Vorgehensweise. ABC

11.94 Frau Meier erhält für ihre Eigentumswohnung zwei Angebote: entweder 250 000,00 € in bar oder 283 000,00 € in drei Jahren. Die erste Geldsumme würde sie für drei Jahre auf ein Kapitalsparbuch mit einem Zinssatz von $i = 4{,}125\ \%$ legen. Welches Angebot soll sie annehmen? Begründe deine Antwort. ABD
Hinweis: Bei einem Kapitalsparbuch erfolgt eine einmalige Einlage, die zu einem fixen Zinssatz über einen vorgegebenen Zeitraum verzinst wird.

11.95 Herr Franz möchte von seinem Nachmieter für die Investitionen in seinem Schrebergarten, für die er insgesamt 3 574,39 € bezahlt hat, eine Ablöse, die an die jährliche Inflation von 2,2 % angepasst ist. Welchen Betrag sollte er verlangen, wenn die Investitionen vor drei Jahren getätigt wurden und die Wertminderung durch Benützung unberücksichtigt bleibt? AB

11.96 Tante Mizzi möchte für ihre zwei Nichten Eva und Maria und ihren Neffen Achim, die soeben 15, 14 und 12 Jahre alt wurden, jeweils ein Kapitalsparbuch mit $i = 5{,}575\ \%$ eröffnen. Tante Mizzi möchte, dass jedes Kind mit vollendetem 19. Lebensjahr 3 000,00 € erhält. Wie viel Geld muss sie vermutlich jeweils einzahlen? AB

11.97 Elenas Eltern möchten ihrer Tochter zu ihrem 18. Geburtstag 18 000,00 € schenken. Dazu legen sie zu ihrer Geburt ein Sparbuch mit einem Barwert K_0 an, das mit einem Zinssatz von 3,5 % verzinst ist. Weitere Einlagen soll es nicht mehr geben. Allerdings muss die Bank den Zinssatz nach 10 Jahren senken. Um doch noch das gewünschte Sparziel zu erreichen, legen Elenas Eltern noch einmal 540,00 € ein. Um wie viel Prozent hat die Bank den Zinssatz gesenkt? AB

11.98 Als der englische König Karl II. (1630 – 1685) im Jahre 1651 bei den Tuchhändlern der englischen Stadt Worcester neue Uniformen für seine Truppen im Wert von 453 Pfund und 3 Shilling (rund 570 Euro) bestellte, ahnte er nicht, dass er dadurch rund 400 Jahre später in den Medien präsent sein würde. Denn Karl II. vergaß, die Rechnung zu bezahlen. So beglich im Juni 2008 der englische Thronfolger Charles (*1947) diese Schuld, allerdings ohne Bezahlung der Zinsen. C
"I suspect it will not have escaped your notice, however, that I am resisting the temptation to pay the debt with full interest! – I wasn't born yesterday (or 400 years ago!)"
Interpretiere diese Aussage hinsichtlich der Bezahlung der Zinsen.

11.99 Eine Aufgabe aus vergangenen Zeiten: AB
Georg Winkler, Edler von Brückenbrand: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für forst- und landwirtschaftliche Anstalten, 6. Auflage, Wien 1866, Seite 403
Ein Wucherer leiht Jemanden 6000 fl., läßt sich aber dafür einen Schuldschein über 8000 fl. ausstellen, die nach drei Jahren ohne Zinsen zahlbar werden sollen. Wie viel Procent hat der Wucherer genommen?

Folgen und Reihen

Zusammenfassung

Arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + d$ bzw. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Summe s_n einer **endlichen arithmetischen Reihe:** $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$

Geometrische Folge: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ bzw. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Summe s_n einer **endlichen geometrischen Reihe:** $s_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Als **Normzahlreihen** werden die (gerundeten) Werte der Glieder einer geometrischen Folge mit $b_1 = 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$ und dem Stufensprung $q_m = \sqrt[m]{10}$ bezeichnet.
Normzahlreihen werden üblicherweise für m = 5, 10, 20 und 40 erstellt.

Einfache Zinsen Z:

$Z_n = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = K_0 \cdot i \cdot n$ — K_0 ... Barwert, i = p % ... Zinssatz; n ... Verzinsungsdauer in Jahren

$K_n = K_0 + Z_n$ — K_n ... Endwert nach t Jahren Verzinsungsdauer

Zinseszinsen:

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$ — K_n ... Endwert nach n Jahren Verzinsungsdauer

Weitere Aufgaben

D **11.100** Handelt es sich bei diesen grafischen Darstellungen einer Folge jeweils um eine arithmetische, geometrische Folge oder weder noch? Begründe deine Antwort.

A) **B)** **C)** **D)**

B **11.101** Von einer Folge kennt man zwei Glieder. Gib ein Bildungsgesetz an.
a) Arithmetische Folge: $a_{17} = -72$, $a_{34} = -157$
b) Geometrische Folge: $b_{11} = 48{,}828\,125$, $b_{14} = 6\,103{,}515\,625$

AB **11.102** Wie groß ist die Summe aller **a)** dreiziffrigen Zahlen? **b)** fünfziffrigen Zahlen?

B **11.103** Berechne jeweils die fehlende Größe, wenn man von einer einfachen Verzinsung ausgeht (Barwert K_0, Verzinsungsdauer t, Zinsen Z bzw. Zinssatz i).
a) K_0 = 300,00 €; t = 250 Tage; Z = 40,45 €
b) Z = 21,25 €; t = 265 Tage; i = 1,575 %
c) K_0 = 150,00 €; i = 1,785 %; Z = 3,00 €
d) Z = 3 540,00 €; t = 4 Monate; i = 4,75 %

B **11.104** Die beiden Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine geometrische Folge. In welchem Verhältnis stehen die Längen dieser drei Seiten?

11.105 Der mittlere Luftdruck in Meereshöhe beträgt p_0 = 101 325 Pa. Er sinkt (annähernd konstant) um ein Hektopascal je acht Meter Höhe. AB
1) Gib das Bildungsgesetz an, das die Folge
$\langle a_n \rangle$ = ⟨Luftdruck in n Meter Höhe über dem Meeresspiegel⟩ beschreibt.
2) Welcher Luftdruck herrscht in 400 m Höhe über dem Meeresspiegel?
3) Wie hoch liegt ein Ort, an dem ein Luftdruck von 50 000 Pa gemessen wird?
4) Ab welcher Höhe herrscht ein Luftdruck von weniger als 75 % von p_0?

11.106 Eine Serie von sieben Schrumpfschläuchen soll mit Durchmessern von 25 mm bis 400 mm hergestellt werden. Welche abgeleiteten Normzahlreihen eignen sich für die Berechnung der Durchmesser? Welche Durchmesser haben die Schläuche? ABC

11.107 Ali bekam vor zwei Jahren ein Sparbuch mit einem Guthaben von 1 000,00 € geschenkt, das mit i = 3,125 % p. a. verzinst wird. Er hebt nun 250,00 € ab und lässt das Sparbuch für weitere zwei Jahre liegen. Wie hoch ist nach Abzug der KESt der Endwert des Sparbuchs? AB

11.108 Zeige, dass die Abmessungen der DIN-B Papierformate durch eine geometrische Folge bestimmt sind. Welchen Wert hat der Faktor q? BD

11.109 Die Französin Jeanne Calmet (21. 2. 1875 – 4. 8. 1997) gilt als ältester Mensch, der je gelebt hat. 90-jährig verkaufte sie im Jahre 1965 ihr Haus an einen 47-jährigen Anwalt gegen eine monatliche Leibrente von 2 500,00 Francs (1,00 € = 6,559 57 Franc). Der Anwalt starb im Dezember 1995, seine Witwe musste die Zahlungen bis zum Tod Calmets fortführen. ABD
1) Wie hoch ist die Summe der an Mme. Calmet geleisteten Zahlungen, wenn man weder die Inflation noch eine eventuelle Verzinsung berücksichtigt?
2) Welchen Wert hatte die letzte Rate, wenn man von einer mittleren, jährlichen Inflation von 4 % ausgeht, an die die Zahlungen jährlich angepasst wurden?

Wissens-Check

		gelöst
1	Gib das nächste Glied der Folge an. Begründe deine Antwort. A) ⟨16, 8, 4, 2 ...⟩ B) ⟨3, 7, 11, 15 ...⟩ C) ⟨3, 9, 27, 81 ...⟩	
2	Ich weiß, ob es sich bei einer Folge um eine arithmetische, geometrische Folge oder weder noch handelt und kann jeweils ein Beispiel angeben.	
3	Berechne die ersten fünf Glieder der Folge und die Summe s_5. A) $a_n = 3{,}5 + 1{,}5 \cdot (n - 1)$ B) $a_n = 10\,000 \cdot 0{,}8^{n-1}$	
4	Ich kann die Begriffe „Barwert", „Endwert" und „Zinsen" erklären.	
5	10 000,00 € werden zu 5 % zehn Jahre lang verzinst. Begründe, welcher der angegebenen Werte der Endwert ist und warum die anderen Werte dafür nicht in Frage kommen, ohne die Berechnung durchzuführen. A) 576 650,39 € B) 52 500,00 € C) 16 288,95 € D) 1 628,89 €	

Lösung:
1) A) 1 = 2 · 0,5; B) 19 = 15 + 4; C) 243 = 81 · 3   2) siehe Seite 278 und 283   3) A) ⟨3,5; 5; 6,5; 8; 9,5⟩, s_5 = 35,5;
B) ⟨10 000; 8 000; 6 400; 5 120; 4 096⟩, s_5 = 33 616   4) siehe Seite 290   5) C), weil die Zinsen rund 5 000 € betragen.

12 Fehlerrechnung

Am 17. Jänner 1929 hatte der Seemann Popeye seinen ersten Auftritt in der Comic-Serie „Thimble Theatre". Sein Schöpfer Elzie Crisler Segar (US-amerikanischer Zeichner, 1894 – 1938) stattete ihn mit Kapitänsmütze, Anker-Tattoo und unglaubwürdigen Muskeln aus. Aber nicht nur diese Muskeln sondern vor allem die Unmengen an Dosenspinat, die Popeye schluckte, verliehen ihm unglaubliche Kräfte. Dabei war der hohe Eisengehalt im Spinat ein wichtiges Argument für den regelmäßigen Spinatkonsum. Allerdings entpuppte sich dieser hohe Wert in den 1990er Jahren als Fehler, denn der bis dato mutmaßliche Wert von 35 mg Eisen pro 100 g bezog sich auf getrockneten Spinat und nicht wie ursprünglich angenommen auf frischen Spinat. Dieser enthält lediglich 3,5 mg Eisen pro 100 g. Solche spektakulären Fehler, die jahrzehntelang unentdeckt bleiben, sind selten. Allerdings ist es tatsächlich nicht möglich, naturwissenschaftliche Größen genau zu messen. Jede Messung enthält Fehler, die bei der weiteren Verwendung der Daten berücksichtigt werden müssen.

12.1 Grundbegriffe

AC **12.1** Erhard möchte die Länge eines Tischs abmessen. Er verwendet dafür ein handelsübliches Zentimetermaß.

1) Wie genau kann er die Länge des Tischs damit messen?

2) Welche Fehler könnten bei der Messung passieren?

Bei der Ausführung von Rechenoperationen auf verschiedenen Rechnern kommt es zu unterschiedlich großen Fehlern, da die Darstellung der Ergebnisse von der internen Genauigkeit und dem darstellbaren Wertebereich abhängig ist. Darüber hinaus werden Rechenoperationen, wie zum Beispiel das Wurzelziehen, mit einem Verfahren berechnet, das nach endlich vielen Schritten abgebrochen werden muss, wodurch ebenfalls Fehler entstehen.

Allgemein lassen sich **drei Arten von Fehlern** unterscheiden:

- **Datenfehler**: Daten können aufgrund von Messungen oder bereits erfolgten Rechenoperationen fehlerhaft sein. Wurde zum Beispiel die Masse m eines Stoffs falsch bestimmt, so ist auch die damit berechnete Stoffmenge n falsch.
- **Verfahrensfehler**: Diese Art von Fehlern entsteht, weil theoretisch unendlich lange Rechenverfahren nach endlich vielen Schritten abgebrochen werden. So kann man zum Beispiel $\sqrt{2}$ nur näherungsweise als Dezimalzahl angeben, die genaue Berechnung ist nicht möglich.
- **Rundungsfehler**: Da für die Darstellung von Zahlen nur eine begrenzte Anzahl von Stellen zur Verfügung steht, werden Ergebnisse, für deren Darstellung die vorhandene Stellenanzahl nicht ausreicht, abgeschnitten bzw. gerundet. So kann man Längen mit einer Messschraube zum Beispiel „nur" auf 0,01 mm genau messen.

AD **12.2** Was kann man bei der Temperaturmessung mithilfe eines Thermometers alles falsch machen? Begründe deine Antwort.

AD **12.3** Bestimme deine Körpergröße. Welche der oben genannten Fehler können dabei auftreten? Formuliere deine Überlegungen mit eigenen Worten.

CD **12.4** Jasmin sagt: „$\sqrt{10} + \sqrt{2} = 4{,}58$". Welche der oben genannten Fehler sind bei der Berechnung passiert?

12.2 Zahlen beschränkter Genauigkeit

Messwerte können immer nur mit einer beschränkten Genauigkeit ermittelt bzw. angegeben werden.

12.5 Die 28 Schülerinnen und Schüler des 1. Jahrgangs wurden gemessen und gewogen. Die Schulärztin hat alle Körpergrößen auf cm genau gemessen. Bei Marion notiert sie 175 cm.

ACD

1) Ist Marion genau 175 cm groß? Zwischen welchen Werten kann ihre tatsächliche Größe liegen, wenn die Angabe korrekt ist?

2) Ist die Frage aus ***1)*** auch für die Angabe „28 Schülerinnen und Schüler" sinnvoll bzw. notwendig? Begründe deine Antwort.

Üblicherweise können Messergebnisse nur mit einer begrenzten Genauigkeit angegeben werden. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten sollen an einem Beispiel veranschaulicht werden.

Für eine Vitrine wird eine Glasplatte um 18,90 € gekauft. Die Dicke dieser Platte wird mit einem Messschieber gemessen.

Karl hat einen Messschieber mit Noniusskala, die eine Messgenauigkeit von 0,1 mm ermöglicht. Seine Messung ergibt eine Dicke von 3,2 mm. Die Genauigkeit dieses Werts ist jene, die das Messgerät zulässt.

3,1 3,15 3,2 3,25 3,3

Karls Ergebnis von 3,2 mm bedeutet, dass die letzte Ziffer 2 bereits eine gerundete Ziffer ist. Bei korrekter Funktion und Anwendung des Messgeräts liegt der exakte Wert im Intervall [3,15 mm; 3,25 mm[.

In der Werkstätte gibt es auch einen Messschieber mit einer Digitalanzeige, der eine Messgenauigkeit von 0,01 mm hat. Dieses Gerät zeigt bei der Messung 3,20 mm an.

3,195 3,205
3,1 3,15 3,20 3,25 3,3

Das Ergebnis 3,20 mm mit dem genaueren Messgerät bedeutet, dass der exakte Wert im Intervall [3,195 mm; 3,205 mm[liegen muss. Die letzte Ziffer 0 im Zahlenwert 3,20 darf also nicht weggelassen werden, weil sie eine Information über die Genauigkeit der Angabe darstellt.

Mit einer Messung kann kein exakter Wert ermittelt werden, sondern immer nur ein Messergebnis mit einer bestimmten Genauigkeit, die von der Messmethode bzw. dem Messgerät abhängt. Die Anzahl der angegebenen Stellen liefert eine Information über die Genauigkeit.
Im Gegensatz zu den Messergebnissen 3,2 mm bzw. 3,20 mm ist zum Beispiel die Preisangabe 18,90 € ein Wert, der nicht durch Messung entsteht, da alle Stellen der Zahl bekannt sind.

Ergebnisse von **Messungen** sind immer auf eine bestimmte Anzahl von geltenden Ziffern gerundete Werte. Man nennt sie **Zahlen beschränkter Genauigkeit** oder unvollständige Zahlen. Sind alle Stellen einer Zahl bekannt, dann spricht man von einer **genauen (exakten) Zahl**, zum Beispiel bei Zählungen und Preisangaben.
Bei Messungen und Berechnungen mit Messwerten ist auf sinnvolle Genauigkeit zu achten.

12.6 Das Produkt $0,\dot{3} \cdot 0,\dot{1}$ wurde von drei Freunden auf drei verschiedene Arten berechnet:
Bernhard: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$; Christoph: $0,3 \cdot 0,1 = 0,03$; Elfi: $0,33 \cdot 0,11 = 0,0363$
Interpretiere die unterschiedlichen Ergebnisse hinsichtlich ihrer Genauigkeit.

C

12.7 Welche der angegebenen Größen sind exakt bestimmbar, welche nur mit einer begrenzten Genauigkeit? Begründe deine Antwort.

AD

1) Kinobesuche innerhalb eines Monats
2) Zeit für den Schulweg
3) Wegstrecke für den Schulweg
4) Geldbetrag in der Geldbörse
5) Körpergewicht am Morgen
6) Schuhgröße am Abend

12.3 Absoluter und relativer Fehler

Die Differenz Δx zwischen einem (immer beschränkt genauen) Messergebnis x und dem tatsächlichen Wert x_0 einer Größe nennt man den **absoluten Fehler**.

$\Delta x = x - x_0 = \text{Istwert} - \text{Sollwert}$

Oft ist das Vorzeichen der Abweichung nicht von Bedeutung, man berechnet dann den Betrag des absoluten Fehlers:

$|\Delta x| = |x - x_0| = |\text{Istwert} - \text{Sollwert}|$

D **12.8** Welche der folgenden Messungen war genauer? Begründe deine Antwort.

1) In der 2BHIF wurde die Länge eines Wandstücks mit 220 cm gemessen. Die Schüler gehen dabei von einem Messfehler von ±5 cm aus.

2) Aufgrund seiner Messungen und Berechnungen konnte Eratosthenes von Kyrene (griech. Dichter, um 275 – 195 v. Chr.) den Erdumfang mit 41 750 km angeben. Die tatsächliche Länge beträgt 40 075 km am Äquator.

In vielen Fällen ist es wichtig zu wissen, in welchem Verhältnis der absolute Fehler zum tatsächlichen Wert (bzw. Messwert) steht, da dieses Verhältnis meist aussagekräftiger ist als der absolute Fehler. Dieser Quotient wird als **relativer Fehler** bezeichnet.

$$\frac{|x - x_0|}{|x_0|} = \left|\frac{x - x_0}{x_0}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$$

Zahlen beschränkter Genauigkeit sind mit **Fehlern** behaftet.
Die Differenz „Istwert – Sollwert" wird als **absoluter Fehler** bezeichnet.
Den Betrag des Quotienten von absolutem Fehler und tatsächlichem Wert (bzw. Messwert) nennt man **relativen Fehler**. Der relative Fehler wird oft in Prozent angegeben.

B **12.9** Herr Müller hat eine neue Waage mit einer Genauigkeit von ±0,1 kg. Sie zeigt 96 kg an. Wie groß ist der relative Fehler in Prozent höchstens?

Lösung:
$|\Delta x| = 0{,}1\text{ kg},\ x_0 = 96\text{ kg} \Rightarrow \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| = \frac{0{,}1\text{ kg}}{96\text{ kg}} = 0{,}001\,04... \approx 0{,}1\,\%$

B **12.10** Die Füllmenge einer Chipspackung beträgt 495 g ± 20 g.
Wie groß ist der relative Fehler maximal?

AB **12.11** Der Umfang eines Fußballs bei Spielbeginn hat einen Sollwert von 69 cm. Erlaubt sind Bälle mit einem Mindestumfang von 67 cm bis zu einem Höchstumfang von 71 cm. Welche Abweichung vom Sollwert ist maximal erlaubt?

AB **12.12** Hülsenfrüchte werden in 50-kg-Säcken geliefert. Die maximal zulässige Abweichung beträgt 1,5 %. Welche Masse muss der Sack mindestens haben?

AB **12.13** Eine automatische Abfüllanlage für einen Energy-Drink hat einen Sollwert von 450 mℓ. Der relative Fehler beträgt 0,5 %. Wie groß ist die Mindest- bzw. Höchstfüllmenge?

ABD **12.14** In der Unterstufe lernt man oft, dass Wasser seine größte Dichte von $1\,000\,\frac{kg}{m^3}$ bei 4 °C hat. Der exakte Wert beträgt $(999{,}974\,950 \pm 0{,}000\,84)\,\frac{kg}{m^3}$ bei $(3{,}983 \pm 0{,}000\,67)$ °C.

1) Wie groß ist jeweils der absolute bzw. relative Fehler bei der Dichte mindestens bzw. höchstens?

2) Warum verwendet man üblicherweise die „falschen" Werte?

12.4 Fehlerfortpflanzung

12.4.1 Rundungsfehler

12.15 Die Grafik zeigt die Wetterprognose für zwei Wochen. Interpretiere diese Grafik. Gehe dabei auf die Temperatur am 1. Tag ein und auf die mögliche Temperatur zwei Wochen später. C

Werden in einer Rechnung Werte beschränkter Genauigkeit verwendet, so pflanzt sich diese Ungenauigkeit auch auf das Ergebnis fort.

12.16 Die Seitenlängen eines Rechtecks werden mit a = 3,5 m und b = 4,2 m gemessen. Berechne den Umfang, berücksichtige dabei die Messgenauigkeit der Angabe. Erkläre deine Vorgehensweise. ABD

Lösung:
Die jeweils letzte Ziffer ist durch die Messung bereits mit einem Rundungsfehler behaftet.
Es gilt also: $3{,}45\text{ m} \leq a < 3{,}55\text{ m}$ und $4{,}15\text{ m} \leq b < 4{,}25\text{ m}$
Der exakte Wert u für den Umfang liegt daher in folgendem Bereich:
$2 \cdot (3{,}45 + 4{,}15)\text{ m} \leq u < 2 \cdot (3{,}55 + 4{,}25)\text{ m} \Rightarrow 15{,}2\text{ m} \leq u < 15{,}6\text{ m}$

Die Genauigkeit von Ergebnissen hängt von der Genauigkeit der Angabe ab. Im Allgemeinen genügen für Ergebnisse die Angabe von drei geltende Ziffern.

Beachte: Die Fortpflanzung von Rundungsfehlern hängt von der Rechenoperation ab.

- **Addition bzw. Subtraktion**: Runde das Ergebnis höchstens auf jene Genauigkeit, die der geringsten Genauigkeit in den Angaben entspricht.
- **Multiplikation bzw. Division**: Runde auf höchstens so viele geltende Ziffern, wie sie die Angabe mit der geringsten Anzahl an geltenden Ziffern aufweist.

ZB: x = 3,5 m; y = 0,875 m (Messergebnisse)
Runde das Ergebnis von x + y auf **eine** Kommastelle, also dm genau.
Runde das Ergebnis von $x \cdot y$ auf **zwei** geltende Ziffern.

12.17 Berechne jeweils die Summe und das Produkt der beiden Zahlen und runde korrekt. B
a) a = 2,0 cm und b = 8,45 cm ***b)*** c = 0,001 g und d = 0,750 g ***c)*** x = 2 und y = 2,5

12.18 Die Seitenlängen eines rechteckigen Baugrunds werden mit a = 53 m und b = 45 m gemessen. Der Preis pro Quadratmeter beträgt 145,00 €. BC
1) Wie groß ist der Flächeninhalt mindestens bzw. höchstens?
2) Ermittle den Preis auf Basis des ohne Abweichungen berechneten Flächeninhalts, des minimalen und des maximalen Flächeninhalts und vergleiche die Ergebnisse.

12.19 Die Abmessungen eines kegelförmigen Trichters werden mit h = 12,3 cm und d = 4,5 cm gemessen. Wie groß ist das Volumen mindestens bzw. höchstens? ABC

12.4.2 Messfehler

Anhand der Werte $x = x_0 \pm |\Delta x|$ und $y = y_0 \pm |\Delta y|$ wird nun exemplarisch die Fehlerfortpflanzung bei den Grundrechnungsarten untersucht. Dabei stellen x_0 bzw. y_0 die Sollwerte und $|\Delta x|$ bzw. $|\Delta y|$ die absoluten (Mess-)Fehler dar, wobei immer der maximale Fehler abgeschätzt wird.

ZB: $x = 6 \pm 0{,}2$ und $y = 3 \pm 0{,}1$

Addition

$z = x + y$

- Maximalwert: $6{,}2 + 3{,}1 = 9{,}3$
- Minimalwert: $5{,}8 + 2{,}9 = 8{,}7$

$\Rightarrow \; z = 9 \pm 0{,}3$

Allgemein gilt: $z = (x_0 \pm |\Delta x|) + (y_0 \pm |\Delta y|) = (x_0 + y_0) \pm (|\Delta x| + |\Delta y|)$

Subtraktion

$z = x - y$

- Maximalwert: $6{,}2 - 2{,}9 = 3{,}3$
- Minimalwert: $5{,}8 - 3{,}1 = 2{,}7$

$\Rightarrow \; z = 3 \pm 0{,}3$

Allgemein gilt: $z = (x_0 \pm |\Delta x|) - (y_0 \mp |\Delta y|) = (x_0 - y_0) \pm (|\Delta x| + |\Delta y|)$

Bei **Addition** bzw. **Subtraktion** zweier Messwerte $x = x_0 + |\Delta x|$ und $y = y_0 + |\Delta y|$ werden die beiden **absoluten Fehler** $|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|$ addiert.

Multiplikation

$z = x \cdot y$

- Maximalwert: $(6 + 0{,}2) \cdot (3 + 0{,}1) = 18 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}02 \approx 19{,}2$
  Da der Wert 0,02 im Vergleich zur Genauigkeit der angegebenen Werte sehr viel kleiner ist, wird er bei der Angabe des Ergebnisses vernachlässigt.
- Minimalwert: $(6 - 0{,}2) \cdot (3 - 0{,}1) = 18 - 0{,}6 - 0{,}6 + 0{,}02 \approx 16{,}8$
  Auch hier wird der Wert 0,02 vernachlässigt.

$z = x \cdot y \approx 18 \pm 1{,}2$

Allgemein gilt: $z = x \cdot y = (x_0 \pm |\Delta x|) \cdot (y_0 \pm |\Delta y|) = x_0 \cdot y_0 \pm y_0 \cdot |\Delta x| \pm x_0 \cdot |\Delta y| + \underbrace{|\Delta x| \cdot |\Delta y|}_{\text{vernachlässigbar klein}}$,

das heißt: $|\Delta z| \approx |y_0 \cdot \Delta x| + |x_0 \cdot \Delta y|$

Dividiert man durch $z_0 = |x_0 \cdot y_0|$, so erhält man: $\left|\frac{\Delta z}{z_0}\right| \approx \left|\frac{y_0 \cdot \Delta x}{x_0 \cdot y_0}\right| \pm \left|\frac{x_0 \cdot \Delta y}{x_0 \cdot y_0}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| \pm \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$

Für obiges Beispiel ergibt sich: $\frac{1{,}2}{18} = \frac{0{,}6}{18} + \frac{0{,}6}{18} = \frac{0{,}2}{6} + \frac{0{,}1}{3}$

Die Berechnungen bei der **Division** erfolgen analog.

Abschätzung der Fehlerfortpflanzung bei **Multiplikation** und **Division**

Der relative Fehler ist gleich der **Summe der relativen Fehler** der Messwerte:

$$\left|\frac{\Delta z}{z_0}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$$

Potenzieren

ZB: $(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; dabei werden die Terme $3x_0 \cdot (\Delta x)^2$ und $(\Delta x)^3$ vernachlässigbar klein.

Für den absoluten Fehler gilt: $|\Delta z| \approx 3 \cdot x_0^2 \cdot \Delta x$, die Division durch $z_0 = x_0^3$ ergibt den relativen Fehler $\left|\frac{\Delta z}{z_0}\right| \approx 3 \cdot \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$

Abschätzung der Fehlerfortpflanzung beim **Potenzieren** $z = x^n = (x_0 + |\Delta x|)^n$
Der relative Fehler des Messwerts wird mit dem Betrag des Exponenten multipliziert:

$$\left|\frac{\Delta z}{z_0}\right| \approx |n| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$$

12.20 Gib den relativen und den absoluten Fehler von $a = \frac{x \cdot y}{z}$ für $x = 4 \pm 0{,}1$, $y = 2 \pm 0{,}2$ und $z = 6 \pm 0{,}3$ an. B

Lösung:

$a_0 = \frac{4 \cdot 2}{6} = \frac{4}{3}$

$\left|\frac{\Delta a}{a_0}\right| \approx \frac{0{,}1}{4} + \frac{0{,}2}{2} + \frac{0{,}3}{6} = 0{,}175 = 17{,}5\,\%$ ● Relativer bzw. prozentualer Fehler

$|\Delta a| \approx \frac{4}{3} \cdot 0{,}175 = 0{,}233... \approx 0{,}2$ ● Die Berechnung des absoluten Fehlers erfolgt aus dem relativen Fehler.

12.21 Berechne den absoluten und den relativen Fehler bei der Berechnung des angegebenen Terms für $x = 3 \pm 0{,}1$; $y = 6 \pm 0{,}2$; $z = 8 \pm 0{,}3$. B

a) $a = x + y - z$ **b)** $b = 2x - 3y + 5z$ **c)** $c = 3 \cdot (2x - y + z)$

12.22 Berechne den relativen und den absoluten Fehler für $x = 5 \pm 0{,}2$ und $y = 6 \pm 0{,}1$. B

a) $a = x^2 \cdot y$ **b)** $b = \frac{x}{y}$ **c)** $c = \frac{x - y^2}{x}$

12.23 Die Ohm'schen Widerstände $R_1 = (270 \pm 5{,}4)\ \Omega$ und $R_2 = (330 \pm 6{,}6)\ \Omega$ sind in Serie geschaltet. Wie groß ist der maximale Fehler bei der Berechnung des Gesamtwiderstands R? AB

12.24 Die Ohm'schen Widerstände $R_1 = (1\,500 \pm 75)\ \Omega$ und $R_2 = (680 \pm 34)\ \Omega$ werden parallel geschalten. Wie groß ist der maximale Fehler bei der Berechnung des Gesamtwiderstands R? AB

12.25 Von einem gleichschenkligen Dreieck wurden die Länge der Seite $c = (6{,}4 \pm 0{,}1)$ cm und die Höhe $h = (8{,}2 \pm 0{,}2)$ cm gemessen. Berechne den Flächeninhalt unter Angabe des absoluten und des relativen Fehlers. AB

12.26 Eine würfelförmige Verpackung hat eine Innenkantenlänge von $a = (126{,}0 \pm 0{,}2)$ mm. Auf dieser Verpackung ist „Volumen: 2 Liter“ aufgedruckt. Stimmt dieser Aufdruck? Peter antwortet mit „Ja“, Heidi mit „Nein“. Begründe, warum beide Recht haben könnten. BCD

12.27 Ein zylinderförmiges Marmeladeglas hat den Radius $r = (4{,}3 \pm 0{,}2)$ cm und die Höhe $h = (10{,}2 \pm 0{,}3)$ cm. Wie viele solcher Gläser können mindestens bzw. höchstens befüllt werden, wenn insgesamt neun Liter Marmelade eingekocht wurden und die Gläser bis zum Rand gefüllt werden? Welche zusätzliche Messungenauigkeit kann sich ergeben? ABC

12.4.3 Wertschrankenmethode

Die Methode der Wertschranken ist eine weitere Möglichkeit zur Fehlerabschätzung von Rechenergebnissen, die auf ungenauen Messdaten beruhen.

ZB: Für die Abmessungen eines rechteckig eingefassten Blumenbeets werden eine Länge von $a = (32 \pm 0{,}1)$ m und eine Breite von $b = (20 \pm 0{,}1)$ m ermittelt.
Will man den Flächeninhalt berechnen, müssen die Abweichungen der Messergebnisse berücksichtigt werden.

Die untere Schranke der Länge beträgt
$a_u = a - \Delta a = 31{,}9$ m und die obere Schranke $a_o = a + \Delta a = 32{,}1$ m. Diese beiden Längen nennt man **Wertschranken**. Ebenso erhält man für die Breite b die Wertschranken $b_u = 19{,}9$ m und $b_o = 20{,}1$ m.

Nun berechnet man jeweils den Flächeninhalt für die unteren und für die oberen Werte. So erhält man die Wertschranken für den wahren Flächeninhalt.
$A_u = 31{,}9\text{ m} \cdot 19{,}9\text{ m} = 634{,}81\text{ m}^2$; $A_o = 32{,}1\text{ m} \cdot 20{,}1\text{ m} = 645{,}21\text{ m}^2$

Damit der Flächeninhalt wieder in der Form $A \pm \Delta A$ angeschrieben werden kann, wird das arithmetische Mittel der beiden Werte A_u und A_o berechnet. Der maximale Fehler ΔA ist dann die halbe Schwankungsbreite zwischen den beiden Werten A_o und A_u.

$$A = \frac{A_u + A_o}{2} = \frac{634{,}81\text{ m}^2 + 645{,}21\text{ m}^2}{2} = 640{,}01\text{ m}^2$$

$$\Delta A = \frac{A_o - A_u}{2} = \frac{645{,}21\text{ m}^2 - 634{,}81\text{ m}^2}{2} = 5{,}20\text{ m}^2$$

Für die Größe der Fläche erhält man somit: $A_{ges} = (640{,}01 \pm 5{,}20)\text{ m}^2$

Aufgaben 12.28 – 12.32: Berechne den gesuchten Wert und den maximalen Fehler mithilfe der Wertschrankenmethode.

AB **12.28** Von einem quadratischen Prisma werden die Länge der Seitenkante $a = (6{,}0 \pm 0{,}2)$ cm und die Höhe $h = (12{,}0 \pm 0{,}4)$ cm gemessen. Berechne das Volumen.

AB **12.29** Der Radius eines Drehzylinders wird mit $r = (15{,}0 \pm 0{,}4)$ cm und die Höhe mit $h = (24{,}0 \pm 0{,}2)$ cm gemessen. Berechne die Oberfläche.

AB **12.30** Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks wird mit $c = (201{,}0 \pm 0{,}3)$ cm und eine Kathete mit $b = (156{,}0 \pm 0{,}2)$ cm gemessen. Berechne die zweite Kathete.

AB **12.31** In einem großen Anbaugebiet werden ungefähr (60 000 ± 1 000) Liter Traubensaft erzeugt. Wie viele annähernd zylinderförmige Flaschen mit einem Radius von $r = (4{,}0 \pm 0{,}5)$ cm und einer Höhe von $h = (15{,}0 \pm 0{,}3)$ cm könnte man damit befüllen?

AB **12.32** Eine Parallelschaltung enthält drei Ohm'sche Widerstände: $R_1 = (200 \pm 1)\ \Omega$, $R_2 = (400 \pm 3)\ \Omega$ und $R_3 = (500 \pm 4)\ \Omega$. Schätze den Fehler bei der Berechnung des Gesamtwiderstands R ab.

Zusammenfassung

Sind alle Stellen einer Zahl bekannt, dann spricht man von einer **genauen (exakten) Zahl**, zum Beispiel bei Zählungen und Preisangaben. Ergebnisse von **Messungen** sind auf eine bestimmte Anzahl von geltenden Ziffern gerundete Werte. Man nennt sie **Zahlen beschränkter Genauigkeit** oder unvollständige Zahlen.
Bei Messungen und Berechnungen mit Messwerten ist auf sinnvolle Genauigkeit zu achten.

Fehlerrechnung

Absoluter Fehler: $|\Delta x| = |x - x_0|$ Relativer Fehler: $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ mit x ... Istwert, x_0 ... Sollwert

Fehlerfortpflanzung

Addition bzw. Subtraktion: $|\Delta x| + |\Delta y|$ ... Addition der absoluten Fehler

Multiplikation bzw. Division: $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$ ... Addition der relativen Fehler

Potenzieren $(x + \Delta x)^n$:

$|n| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ ... Der relative Fehler wird mit dem Betrag des Exponenten multipliziert.

Wertschrankenmethode

Die Wertschrankenmethode ermöglicht eine Fehlerabschätzung von Rechenergebnissen, die auf ungenauen Messdaten beruhen.

Weitere Aufgaben

12.33 Ein Putzmittel wird in Flaschen mit einem Sollinhalt von 500 ml abgefüllt. Die Abweichung vom Sollwert darf höchstens 2 % betragen. Wie viel Milliliter müssen mindestens bzw. höchstens in der Flasche sein? AB

12.34 Der Durchmesser d eines Kreises wird mit 2 cm gemessen. Wie groß ist der Fehler bei der Berechnung des Flächeninhalts, wenn bei der Messung des Durchmessers ein Fehler von höchstens 3 % angenommen wird? AB

12.35 Eine Vogelvolière in der Form eines Drehzylinders mit aufgesetztem Drehkegel weist einen Durchmesser von $d = (4{,}0 \pm 0{,}1)$ m auf. Die Höhe des Zylinders beträgt $h_1 = (6{,}0 \pm 0{,}2)$ m, die Höhe des Kegels beträgt $h_2 = (3{,}0 \pm 0{,}2)$ m.
Berechne mithilfe der Wertschrankenmethode das Volumen der Volière und den maximalen Fehler. AB

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann den Unterschied zwischen Zahlen begrenzter Genauigkeit und exakter Zahlen erklären und jeweils ein Beispiel angeben.	
2	Ich kann den absoluten und den relativen Fehler berechnen: Istwert x = 4,08 g, Sollwert x_0 = 4,25 g	
3	Eine Kugel hat den Radius r = (3,15 ± 0,2) cm. Berechne die Größe der Oberfläche mithilfe der Wertschrankenmethode.	

Lösung:
1) siehe Seite 297 2) absoluter Fehler = 0,17; relativer Fehler = 0,04 3) $O = (125{,}19 \pm 15{,}83)\ \text{cm}^2$

Mathcad – Kurzeinführung

Mathcad ist ein Computeralgebrasystem, das sich aufgrund seiner Textverarbeitungsfunktionen zum Erstellen mathematischer Dokumente eignet. In diesem Buch wird mit Version 15 gearbeitet, wobei die Befehle auch bei älteren Versionen weitgehend ident sind.

Beim Start des Programms wird automatisch ein neues Dokument geöffnet.
Mittels **Ansicht**, **Symbolleisten**, **Rechnen** öffnet man die Symbolleiste **Rechnen**. Sie kann in die Menüleiste verschoben werden und steht bei weiteren Programmaufrufen jeweils sofort zur Verfügung. Durch Anklicken der Symbole können nun weitere Paletten geöffnet werden, zum Beispiel **Auswertung**, **Boolesch**, die ebenfalls in der Menüleiste positioniert werden können.

Verwenden des Editors

ZB: Der Term $\frac{2x+1}{(x-3)^2}$ soll eingegeben werden.

- Durch einen Mausklick wird die gewünschte Eingabeposition auf dem Arbeitsblatt markiert.
- Sowohl der waagrechte als auch der senkrechte „Cursor" stehen automatisch beim zuletzt eingegebenen Zeichen, hier „1".
- Länge und Position der blauen Bearbeitungslinien werden durch die Leertaste und mithilfe der [→]-Taste der Tastatur gesetzt. Ein so markierter Term wird bei Bedarf dann automatisch in Klammern gesetzt.
- Ein Textfeld kann durch Eingabe von ["] oder durch Drücken der Leertaste nach einem Wort erzeugt werden.

$2\cdot x+1$ $\quad 2\cdot x+1$ $\quad \frac{2\cdot x+1}{x-3}$ $\quad \frac{2\cdot x+1}{x-3}$ $\quad \frac{2\cdot x+1}{(x-3)^2}$

Eingeben eines Texts

Text

Variablen und Einheiten

Wert := 4
wert := 5
a := 4

- Variablennamen können mehrere Zeichen lang sein, zwischen Groß- und Kleinbuchstaben wird unterschieden.
- Das Zuweisungssymbol [:=] kann in der Symbolleiste **Auswertung** gewählt oder über die Tastatur durch Eingabe von [:] erzeugt werden.
- Eine Variablenvereinbarung gilt ab der Eingabeposition, also rechts und unterhalb davon. Ausnahme: Variable, die mittels [≡] aus der Symbolleiste **Auswertung** global definiert wurden.

U := 15V
R := 10Ω

- Wird als Name ein für eine Einheit reserviertes Zeichen oder Wort verwendet, wird die entsprechende Variable mit einer grünen Markierung unterwellt. Dies kann im Menü **Extras**, **Einstellungen** unter **Warnmeldungen** deaktiviert werden.
- Einheiten können über die Tastatur eingetippt oder über das Menü **Einfügen**, **Einheiten** bzw. das entsprechende Symbol in der Menüleiste angegeben werden.

$\sin(30°) = 0.5$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$

- Bei Berechnungen mit Winkelfunktionen muss der Winkel im Bogenmaß angegeben werden. Die Umrechnung kann mithilfe des °-Zeichens erfolgen.

Numerische und symbolische Auswertung

$I := \frac{U}{R} = 1.5\,A$

$I := \frac{U}{R} \rightarrow \frac{3 \cdot V}{2 \cdot \Omega}$

- Die numerische Auswertung erfolgt mithilfe des Zeichens [=], das über die Tastatur eingegeben oder in der Symbolleiste **Auswertung** angeklickt werden kann.
- Eine symbolische Auswertung erfolgt durch Auswählen von [▪→] aus der Symbolleiste **Auswertung** oder mittels (versionsabhängiger) Tastenkombination; die Auswertung erfolgt erst nach Anklicken des Arbeitsblatts außerhalb des Eingabefelds.

Auswertu
= :=
→ ▪→

Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen

$3x + 5 = 7$ auflösen $\rightarrow \frac{2}{3} = 0.667$

$w \cdot r + s = g$ auflösen, $r \rightarrow \frac{g - s}{w}$

$x^3 + 8 = 0$ auflösen $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{3} \cdot i \\ 1 - \sqrt{3} \cdot i \end{pmatrix}$

$x1 := 3x + 5 = 7$ auflösen $\rightarrow \frac{2}{3}$

$x1 = 0.667$

$x := 2$

$\text{wurzel}(e^x - 5x, x) = 2.543$

Vorgabe

$x + y = 5$

$2x - y = 4$

$\text{Suchen}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Der Gleichheitsoperator ist das Zeichen [=] aus der Symbolleiste **Boolesch**, er kann auch über [Strg] [+] eingegeben werden.
- Die Auswertung erfolgt mit dem Befehl **auflösen** aus der Palette **Symbolik**. Er kann auch über die Tastatur eingegeben werden.
- Durch Zuweisung der Gleichung zu einer Variablen wird das Ergebnis abgespeichert.
- Die Berechnung von Nullstellen, f(x) = 0, erfolgt näherungsweise mit dem Befehl **wurzel(f(x),x)**. Dazu muss ein Startwert angegeben werden, der nahe an der vermuteten Nullstelle liegt, hier zB x = 2.
- Gleichungssysteme können als Block nach dem Schlüsselwort **Vorgabe** eingegeben werden. Die Lösung wird mit dem Befehl **Suchen** angezeigt.

Eingabe und Darstellung von Funktionen

$f(x) := x^2 - 1$

Gerade markiertes X-Y-Diagramm wird formatiert.
X-Y-Achsen | Spuren | Zahlenformat | Beschriftungen | Standardwerte
Zweite Y-Achse aktivieren
X-Achse: Logarithmusskala, Gitterlinien, Nummeriert, Autom. Skalierung, Markierung anz., Autom. Gitterweite, Anz. d. Gitterlinien: 2
Prim. y-Achse | Sekundäre y-Achse: Logarithmusskala, Gitterlinien, Nummeriert, Autom. Skalierung, Markierung anz., Autom. Gitterweite, Anz. d. Gitterlinien: 2
Achsenstil: Kasten, Kreuz, Kein
Gleiche Skalierung

- Der Funktionsterm kann direkt eingegeben werden; mithilfe von **Einfügen**, **Funktion** oder Anklicken von [f(x)] in der Menüleiste steht ein Katalog mit vordefinierten Funktionen zur Verfügung.
- Eine leere Grafikvorlage erzeugt man durch Eingabe des Funktionsnamens und [@] oder durch Öffnen der Symbolleiste **Diagramm** [ ] und Auswählen von **X-Y-Diagramm** [ ].
- In die Markierungen werden Achsenbegrenzungen, Variablennamen und Funktionsnamen eingetragen.
- Um mehrere Funktionen darzustellen, können weitere Funktionsnamen, jeweils durch Beistriche getrennt, eingegeben werden.
- Das Formatierungsmenü öffnet sich bei Doppelklick auf das Diagrammfeld.

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Wurzeln in Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(a \geqslant 0, b > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$

Rechenregeln:

Multiplikation von Wurzeln: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Division von Wurzeln: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Weitere Rechenregeln: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$

Partielles Wurzelziehen bzw. Faktor unter die Wurzel bringen: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$

Potenzfunktionen:

Grundtypen von Potenzfunktionen $y = x^n$:

n gerade, positiv | n ungerade, positiv | n gerade, negativ | n ungerade, negativ

$y = a \cdot x^n$ — Der Faktor a bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung.

$y = a \cdot (x - b)^n + c$ — Die Zahl c bewirkt eine Verschiebung entlang der y-Achse. Die Zahl b bewirkt eine Verschiebung entlang der x-Achse.

Eigenschaften von Funktionen

Nullstelle: $f(x) = 0$, x-Wert des Schnittpunkts mit der x-Achse

Minimum (Tiefpunkt): tiefster Punkt in seiner Umgebung

Maximum (Hochpunkt): höchster Punkt in seiner Umgebung

Fixpunkt: $f(x_F) = x_F$, Stelle und Funktionswert sind gleich

Monotonie: streng monoton steigend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallend: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Symmetrie: gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$ ... symmetrisch zur y-Achse
ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$ ... punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs

Periode p: $f(x + p) = f(x)$

Polstelle: Stelle, an der die Funktion nicht definiert ist und bei Annäherung die Beträge der Funktionswerte „unendlich" groß werden.

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Der Graph einer **quadratischen Funktion** ist eine **Parabel**. Die Funktionsgleichung lässt sich in der **Scheitelpunktform** oder **Polynomform** darstellen.

Scheitelpunktform: $y = a \cdot (x - b)^2 + c$ bzw. $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$
$a \neq 0$, Scheitel $S(b|c)$ bzw. $S(x_S|y_S)$

Polynomform: $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad a_2 \neq 0$

- $0 < |a| < 1$ bzw. $0 < |a_2| < 1$ ... Die Parabel ist **breiter** als die Grundparabel.
  $|a| > 1$ bzw. $|a_2| > 1$ ... Die Parabel ist **schmäler** als die Grundparabel.
- $a > 0$ bzw. $a_2 > 0$ ... Die Parabel ist nach **oben geöffnet**.
  $a < 0$ bzw. $a_2 < 0$ ... Die Parabel ist nach **unten geöffnet**.
- $c > 0$ ... Verschiebung in **positive y-Richtung**
  $c < 0$ ... Verschiebung in **negative y-Richtung**
- a_0 ... y-Koordinate des Schnittpunkts der Parabel mit der y-Achse
- $b > 0$ ... Verschiebung in **positive x-Richtung**
  $b < 0$ ... Verschiebung in **negative x-Richtung**

Interpolation: Zur Berechnung von Zwischenwerten einer nur durch Wertepaare gegebenen Funktion kann die lineare oder die quadratische Interpolation verwendet werden.

Eine **quadratische Gleichung** kann in **Normalform** oder **allgemeiner Form** gegeben sein:

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$

Kleine Lösungsformel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Große Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die **Lösungen** einer quadratischen Gleichung entsprechen den **Nullstellen** der zugehörigen quadratischen Funktion. Die Anzahl der Lösungen ist von der **Diskriminanten** D abhängig.

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bzw. $D = b^2 - 4ac$

- $D > 0$: zwei reelle Lösungen (zwei Nullstellen)
- $D = 0$: eine reelle (Doppel-)Lösung (eine Nullstelle)
- $D < 0$: keine reelle Lösung (keine Nullstelle)

Satz von Vieta, Zerlegung in Linearfaktoren:
$x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q,\ (x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + px + q$

Polynomfunktionen:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Der Exponent n ($n \in \mathbb{N}$) gibt den Grad der Polynomfunktion an.
Polynomfunktionen mit ausschließlich geraden Exponenten sind gerade Funktionen.
Polynomfunktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten sind ungerade Funktionen.

Wurzelfunktionen: Wurzelfunktionen sind Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen. Dabei muss gegebenenfalls der Definitionsbereich der Potenzfunktion eingeschränkt werden. Der Graph entsteht durch **Spiegelung** der Potenzfunktion an der **1. Mediane**.

Wurzelgleichungen: Eine Wurzelgleichung wird durch Quadrieren gelöst. Die Angabe der Definitionsmenge und die Durchführung der Probe sind unbedingt notwendig.

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Exponentialfunktionen mit der Basis a

$y = a^x \quad a > 0$ und $a \neq 1, x \in \mathbb{R}$

$a > 1 \Rightarrow$ streng monoton wachsend; $0 < a < 1 \Rightarrow$ streng monoton fallend

$y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ist symmetrisch zu $y = a^x$ bezüglich der y-Achse.

Wachstumsvorgänge

$y = c \cdot a^{k \cdot x} \quad (c > 0, a > 1, k > 0)$ bzw. $y = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Abklingvorgänge

$y = c \cdot a^{-k \cdot x} + d \quad (c > 0, a > 1, k > 0)$ bzw.

$y = c \cdot a^{k \cdot x} + d \quad (c > 0, 0 < a < 1, k > 0)$

Sättigungsvorgänge

$y = c \cdot (1 - a^{-x})$ bzw. $y = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$

Logistisches Wachstum

$y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ K ... Kapazitätsgrenze

Aperiodische Schwingungsvorgänge

$y = a \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} + b \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t}$ bzw. $y = (a - b \cdot t) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Logarithmen

$b^x = y \Leftrightarrow x = \log_b(y) \quad (b > 0, b \neq 1, y > 0)$

Für jede Basis b ($b > 0, b \neq 1$) gilt:

$\log_b(b) = 1$, da $b^1 = b \qquad \log_b(1) = 0$, da $b^0 = 1$

Zusammenhang zwischen Logarithmen mit verschiedener Basis:

$\log_b(y) = \frac{\lg(y)}{\lg(b)} = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$

Rechengesetze für Logarithmen

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

Logarithmusfunktion

$y = \log_a(x) \quad (x > 0)$ Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $y = a^x$

Logarithmische Skalen und Koordinatensysteme

- Ordinatenlogarithmische Koordinatensysteme: Die senkrechte Achse Y ist logarithmisch skaliert. Exponentialfunktionen erscheinen als Geraden.
- Abszissenlogarithmische Koordinatensysteme: Die waagrechte Achse X ist logarithmisch skaliert. Logarithmusfunktionen erscheinen als Geraden.
- Doppeltlogarithmische Koordinatensysteme: Beide Achsen X und Y sind logarithmisch skaliert. Potenzfunktionen erscheinen als Geraden.

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Hyperbelfunktionen

$y = \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$ $\qquad$ $y = \cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ $\qquad$ $y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Areafunktionen

$y = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \in \mathbb{R}$

$y = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geqslant 1$

$y = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ |x| < 1$

Winkelmessung

Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir das Gradmaß eines Winkels mit α und das Bogenmaß mit x.

Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß:

$1° = \frac{\pi}{180}$ rad $\qquad$ $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$ rad

Umrechnung von Bogenmaß in Gradmaß:

$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$ $\qquad$ $\alpha = x \cdot \frac{180°}{\pi}$

Die Zusammenhänge zwischen den Winkelmaßen können am Einheitskreis veranschaulicht werden.

Umrechnung häufig gebrauchter Winkel:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß in rad	0	$\frac{\pi}{6}$ $\approx 0{,}5$	$\frac{\pi}{4}$ $\approx 0{,}8$	$\frac{\pi}{3}$ ≈ 1	$\frac{\pi}{2}$ $\approx 1{,}57$

Allgemeines Dreieck:

$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

mit $s = \frac{a+b+c}{2}$

Rechtwinkliges Dreieck:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$

$h^2 = p \cdot q$

$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$

$\alpha + \beta = 90°$

Gleichschenkliges Dreieck:

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$\gamma = 180° - 2\alpha$

$u = 2a + c$

Gleichseitiges Dreieck:

$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

$u = 3a$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Strahlensätze

1. Strahlensatz:

$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$

2. Strahlensatz:

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

Trapez: Ein Paar paralleler Seiten

$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

$u = a + b + c + d$

Gleichschenkliges Trapez: $d = b$

Parallelogramm: Zwei Paare paralleler Seiten

$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

$u = 2 \cdot (a + b)$

Die Diagonalen e und f halbieren einander.

Rechteck: Vier gleich große (rechte) Winkel

$A = a \cdot b$

$u = 2 \cdot (a + b)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Quadrat: Vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel

$A = a^2$

$u = 4 \cdot a$

$d = a \cdot \sqrt{2}$

Deltoid: Zwei Paare gleich lange benachbarter Seiten

$A = \frac{e \cdot f}{2}$

$u = 2 \cdot (a + b)$

Die beiden Diagonalen stehen normal aufeinander ($e \perp f$). Die Winkel β und δ sind gleich groß.

Raute (Rhombus): Vier gleich lange Seiten

$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$

$u = 4 \cdot a$

Die Diagonalen e und f stehen aufeinander normal und halbieren einander. Sie sind Winkelsymmetralen.

Kreis:

Kreissektor:

Kreissegment:

Kreisring:

Umfang eines Kreises: $u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises: $A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Kreisbogenlänge: $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Kreissektorfläche: $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{b \cdot r}{2}$

Kreissegmentfläche: $A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$

Umfang eines Kreisrings: $u = 2 \cdot \pi \cdot (r_a + r_i)$

Kreisringfläche: $A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi = 2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot w$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

Gegenkathete von α: Seite, die dem Winkel α **gegen**überliegt
Ankathete von α: Seite, die am Winkel α **an**liegt
Hypotenuse: Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt

Winkelfunktionen

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Steigungswinkel oder **Neigungswinkel** φ: Winkel, den eine Gerade oder eine Ebene mit der Horizontalen einschließt. $k = \tan(\varphi)$ bzw. $\varphi = \arctan(k)$

Flächenprojektionssatz: $A' = A \cdot \cos(\varphi)$
A ... Flächeninhalt einer unter dem Winkel φ geneigten beliebigen Fläche
A′ ... Flächeninhalt der Normalprojektion dieser Fläche

Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel

Ist $P(x_P|y_P)$ ein Punkt am Einheitskreis und ist α der zum P gehörige Winkel, so gilt für seine Koordinaten: $x_P = \cos(\alpha)$ $y_P = \sin(\alpha)$

Für den Tangens von α gilt: $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \cos(\alpha) \neq 0$

Eigenschaften der Winkelfunktionen

$y = \sin(x)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1; 1]$, Periode $p = 2\pi$
$\sin(x) = -\sin(-x)$ ... ungerade Funktion

$y = \cos(x)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1; 1]$, Periode $p = 2\pi$
$\cos(x) = \cos(-x)$ ... gerade Funktion, $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \tan(x)$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$, $W_f = \mathbb{R}$, Periode $p = \pi$
$\tan(x) = -\tan(-x)$ ... ungerade Funktion

Eigenschaften der Arcusfunktionen

$y = \arcsin(x)$: $D_f = [-1; 1]$, $W_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \arccos(x)$: $D_f = [-1; 1]$, $W_f = [0; \pi]$

$y = \arctan(x)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Berechnungen im allgemeinen Dreieck

Trigonometrische Flächenformel: $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2}$

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ bzw. $a : b : c = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$

Cosinussatz:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Goniometrische Beziehungen

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Erster Summensatz

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Zweiter Summensatz

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

Allgemeine Sinusfunktion

$y = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$: $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-a; a]$, Periode $p = \frac{2\pi}{b}$, eine Nullstelle bei $x_0 = -\frac{c}{b}$

Sinusschwingung

$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

A ... Amplitude, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ... Kreisfrequenz, f ... Frequenz,

T ... Periodendauer, φ ... Nullphasenwinkel

Die **Überlagerung von Sinusschwingungen** gleicher Frequenz ist eine Sinusschwingung mit der gleichen Frequenz.

Gleichungen, bei denen die Gleichungsvariable im Argument einer trigonometrischen Funktion steht, heißen **goniometrische Gleichungen**.

Polarkoordinaten

Ein Punkt $P(x_P|y_P)$ der Ebene kann durch Polarkoordinaten $P(r; \varphi)$ festgelegt werden.

Umrechnungen: $x_P = r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$

$y_P = r \cdot \sin(\varphi)$ $\quad \tan(\varphi) = \frac{y_P}{x_P}$, $x_P \neq 0$

Bei Kurven in Polarkoordinaten ist der Abstand r eine Funktion des Winkels φ: $r = r(\varphi)$

Parameterdarstellung

Die Koordinaten der Punkte einer Kurve werden mithilfe eines Parameters t angegeben: $x = x(t)$, $y = y(t)$

Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$ bzw. $j^2 = -1$

Imaginäre Zahlen: $z = b \cdot i$ bzw. $z = b \cdot j$ mit $b \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen: $z = a + bi = \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \cdot i$ bzw. $z = a + bj$; $a, b \in \mathbb{R}$
Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C}$

Darstellungsformen: $z = a + bi = (r; \varphi) = r \underline{/\varphi} = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$

Grafische Darstellung: als Zeiger in der **Gauß'schen Zahlenebene**

Umrechnungen:

$z = a + bi \quad \rightarrow$	$z = (r; \varphi) \quad \rightarrow$
Betrag: $\lvert z \rvert = r = \sqrt{a^2 + b^2}$	Realteil: $a = r \cdot \cos(\varphi)$
Winkel $\varphi = \arg(z)$: $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$	Imaginärteil: $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Euler'sche Formel: $e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ bzw. $e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$

Konjugiert komplexe Zahl zu $z = a + bi$: $z^* = a - bi$

Addition und **Subtraktion:** Es werden jeweils die Realteile und Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert. Für $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ gilt:

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ bzw. $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Grafisch werden komplexe Zahlen wie Vektoren addiert bzw. subtrahiert.

Multiplikation: Die Zahlen $z_1 = a + bi$ und $z_2 = c + di$ werden wie Binome miteinander multipliziert. Für $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Bei der **Division** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$ wird der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners $z_2^* = c - di$ erweitert.

Für $z_1 = (r_1; \varphi_1)$ und $z_2 = (r_2; \varphi_2)$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}; \varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Berechnungen von **Potenzen** komplexer Zahlen:

$z^n = [r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))]^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

$z^n = (r; \varphi)^n = (r^n; n \cdot \varphi)$

Satz von de Moivre: $(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$

n-te Wurzeln (Lösungen) der Gleichung $z^n = (r; \varphi)$:

$$z_1 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n}\right) \qquad z_2 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{1 \cdot 360°}{n}\right) \qquad z_3 = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n}\right) \ldots \qquad z_n = \left(\sqrt[n]{r}; \frac{\varphi}{n} + \frac{(n-1) \cdot 360°}{n}\right)$$

Lösungen von **quadratischen Gleichungen** in $\mathbb{C}$:

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; konjugiert komplexe Lösungen für $D < 0$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}$

Einheitsvektor: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (Skalar): $s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$

Mittelpunkt der Strecke AB: $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$

Schwerpunkt des Dreiecks ABC: $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$

Normalvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten **Parallelogramms**:

$$A_P = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_x b_y - a_y b_x|$$

Vektorprodukt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi), 0° < \varphi < 180°$ bzw. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$

Volumenberechnung: Parallelepiped: $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ Tetraeder: $V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Geradengleichung

im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$: Parameterform ... g: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$

im $\mathbb{R}^2$: Normalvektorform ... g: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ bzw. g: $ax + by = c$

Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$:

Parameterform: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Normalvektorform: ε: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ bzw. ε: $ax + by + cz = d$

(m x n)-Matrix

m Zeilen, n Spalten

a_{ij} ... Elemente der Matrix mit i = 1 ... m, j = 1 ... n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die **Addition** und **Subtraktion** zweier (m x n)-Matrizen und die **Multiplikation** einer Matrix **mit einem Skalar** erfolgen komponentenweise.

Matrizenmultiplikation: Man bildet jeweils das skalare Produkt des i-ten Zeilenvektors einer (m x n)-Matrix mit dem j-ten Spaltenvektor einer (n x r)-Matrix und erhält dadurch eine (m x r)-Matrix – **„Zeile mal Spalte"**.

Inverse Matrix A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Invertieren einer (2 x 2)-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Häufigkeitsverteilung
Die absoluten, relativen oder prozentuellen Häufigkeiten von Datenmengen werden meist in Tabellenform angegeben.

Klassenbildung
Große Datenmengen werden zur Übersichtlichkeit klassifiziert und dabei in maximal 20 wenn möglich gleich breite Klassen zusammengefasst.

Lagemaße
Arithmetisches Mittel: Summe aller Werte, dividiert durch deren Anzahl
Median: Mittlerer Wert der geordneten Liste
Quartile: Teilen die Liste in vier Bereiche zu ca. 25 %
Modalwert: Häufigster Wert einer Liste

Streuungsmaße
Spannweite (Range): Differenz zwischen Maximum und Minimum
Interquartilsabstand: Differenz zwischen den Quartilen q_3 und q_1
Varianz σ^2 bzw. s^2: Mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert
$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$ bei Grundgesamtheiten bzw. $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ bei Stichproben
Standardabweichung = $\sqrt{\text{Varianz}}$

Arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + d$ bzw. $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Summe s_n einer **endlichen arithmetischen Reihe**: $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n - 1) \cdot d]$

Geometrische Folge: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ bzw. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Summe s_n einer **endlichen geometrischen Reihe**: $s_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Einfache Zinsen Z:
$Z_n = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = K_0 \cdot i \cdot n$ — K_0 ... Barwert, i = p % ... Zinssatz
n ... Verzinsungsdauer in Jahren
$K_n = K_0 + Z_n$ — K_n ... Endwert nach t Jahren Verzinsungsdauer

Zinseszinsen:
$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$ — K_n ... Endwert nach n Jahren Verzinsungsdauer

Fehlerrechnung
Absoluter Fehler: $|\Delta x| = |x - x_0|$ Relativer Fehler: $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ mit x ... Istwert, x_0 ... Sollwert

Fehlerfortpflanzung
Addition bzw. Subtraktion: $|\Delta x| + |\Delta y|$ ... Addition der absoluten Fehler

Multiplikation bzw. Division: $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y_0}\right|$ ... Addition der relativen Fehler

Potenzieren $(x + \Delta x)^n$:
$|n| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$ ... Der relative Fehler wird mit dem Betrag des Exponenten multipliziert.

Sachwortverzeichnis

A
abgeleitete Normzahlreihe 287
Abklingvorgänge (Abnahmevorgänge, Zerfallsprozesse) 88, 118
Abrollbewegung 178f.
absolute Häufigkeit 260, 266
absoluter Fehler 298
Abstand, Interquartils- 270, 273
abszissenlogarithmisches Koordinatensystem 114, 118
Abweichung, Standard- 270f., 273
Achse, imaginäre 189
–, Polar- 172f.
–, reelle 189
Addition von komplexen Zahlen 196, 211
– – Matrizen 242f., 254
– – Vektoren 214, 222
– – Wurzeln 21, 39
Algebra, Fundamentalsatz 209
allgemeine Form der quadratischen Gleichung 60, 71
– quadratische Gleichung 60ff.
– Sinusfunktion 151f., 165
– Winkelfunktion 151f.
allgemeines Dreieck 138ff.
alternierende Folge 283
Amplitude 151, 155, 165, 180
Anfangskapital (Barwert) 290f., 294
Anwendungen der Exponentialfunktion 87ff.
– – Matrizenrechnung 250ff.
– quadratischer Funktionen 52f.
Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung 61, 71
aperiodische Schwingungsvorgänge 92, 118
archimedische Spirale 174
Arcuscosinusfunktion 135, 165
Arcusfunktionen 129f., 135, 165
Arcussinusfunktion 135, 165
Arcustangensfunktion 135, 165
Areafunktionen 117, 119
Argand, Jean-Robert 189
Argument (Polarwinkel) 191
arithmetische Folge 278, 283, 290, 294
– Reihe, endliche 281, 294
arithmetisches Mittel 265f., 273
Arten von Fehlern 296
assoziativ 243
Astroide (Sternlinie) 180
Asymptote 28, 134
Aufzinsungsfaktor 291
Azimut (Richtungswinkel, Polarwinkel) 172

B
Balkendiagramm 260
Barometrische Höhenformel 122
Barwert (Anfangskapital) 290f., 294
Basis von einem Logarithmus 97
Basisvektor 217
Benford, Frank 109
beschränkte Genauigkeit 297
beschreibende Statistik 258ff.
Betrag einer komplexen Zahl 191f.
– eines Vektors 214, 222
Beziehungen, goniometrische 148ff., 165
Bildungsgesetz einer Zahlenfolge 276
binärer Logarithmus 98
Bogenmaß 124, 193
Boxplot (Kastenschaubild) 267
Bürgi, Jost 80

C
Cardano del Ferro, Geronimo 186
Cosinus 124ff., 165
– hyperbolicus 116
Cosinusfunktion 126, 134, 154, 165
–, Arcus- 135, 165
Cosinuskurve 134
Cosinussatz 140, 143, 165
Cotangens 125
Cramer'sche Regel 235

D
Darstellung von Daten 258ff.
– – –, tabellarische 260
– – komplexen Zahlen 190ff., 211
– – Kurven 172ff.
– – Zahlenfolgen 277
Daten, Darstellung 258ff.
–, –, tabellarische 260
Datenfehler 296
de Moivre, Abraham 204
– –, Satz von 204, 211
Definition von Potenzen 18
Definitionsmenge einer Funktion 5, 14
– – logarithmischen Gleichung 107
– – Wurzelgleichung 37, 39
dekadischer Logarithmus 98
Determinante 227, 246ff.
Diagonalmatrix 241
Diagramm, Balken- 260
–, Kreis- 175
–, Pareto- 260
–, Säulen- 260
–, Zeiger- 155, 158f.
diskretes Merkmal 259
Diskriminante 61, 71
Division von komplexen Zahlen 201f., 211
– – Wurzeln 21f., 39
Doppellösung 61, 71
doppeltlogarithmisches Koordinatensystem 114, 118
Drehimpuls 227
Drehmatrix 250
Drehmoment 226
Drehstreckung 250
Drehung 250
dreidimensionaler Vektor 222
dreidimensionales Koordinatensystem 222
Dreieck, allgemeines 138ff.
–, Flächeninhalt 218, 228
–, rechtwinkliges 124
–, Schwerpunkt 214
Dreiecksberechnungen 141ff., 165
Dreiecksform, Matrix 241
Durchschnitt 265

E
Ebbinghaus, Vergessenskurve 95
Ebene, Gerade in der 232ff.
–, Gleichung der 236, 238
– im Raum 236
Eigenschaften der Exponentialfunktion 82f.
einfache Zinsen 290, 294
– Zinsrechnung 290
Einheit, imaginäre 186f., 211
Einheitskreis 125ff., 165
Einheitsmatrix 241, 244
Einheitsvektor 214, 222
Einheitswurzel 206
Element, inverses 248
–, neutrales 248
– einer Matrix 241, 254
Endkapitel (Endwert) 290f., 294
endliche Folge 276
– arithmetische Reihe 281, 294
– geometrische Reihe 288, 294
Endwert (Endkapital) 290f., 294
Epizykloide 179, 183
Ergänzung, quadratische 46, 60
Erhebung, statistische 258
Erhebungseinheit 258
erste Mediane 7
– –, Spiegelung 12, 14, 34, 39
erster Summensatz 149, 165
Euler, Leonhard 80, 186, 193
Euler'sche Formel 193, 211
– Zahl 80f.
Europabrücke (Tirol) 53
Excel (Tabellenkalkulationsprogramm) 274, 262ff., 269, 272
explizite Darstellung von Zahlenfolgen 277
Exponent, ganzzahliger 18
–, rationaler 19
Exponentialform (komplexe Zahl) 193, 201f., 204
Exponentialfunktion 78ff., 118
–, Veränderung des Graphen 83
Exponentialgleichung 102
exponentielles Wachstum 87, 90
Extremum (Extremwert) 6

F
Fadelpendel, Periodendauer 36
Faktor, Aufzinsungs- 291
–, Linear- 62
–, Wachstums- 87
Faktorisieren 59
Falk, Sigurd 245
Falk'sches Schema 245
Fehler, absoluter und relativer 298
Fehlerfortpflanzung 299ff.
Fehlerrechnung 296
Figur, Lissajous- 180
Fixpunkt 7, 14
Flächenberechnungen mithilfe des Vektorprodukts 228
Flächenformel, trigonometrische 138, 165
Flächeninhalt eines Dreiecks 138, 165, 218, 228
– – Parallelogramms 218, 228, 238
Folge (Zahlenfolge) 276ff.
–, alternierende 283
–, arithmetische 278, 283, 290, 294
–, endliche 276
–, geometrische 283, 291, 294
–, unendliche 276
Formel, Euler'sche 193
Frequenz 155, 165
–, Kreis- 151, 155, 165
–, Schwebungs- 160
Frequenzunterschied 180

Frequenzverhältnis 180
Fundamentalsatz der Algebra 209
Funktion 5f., 14
–, Arcus- 129f., 135, 165
–, Area- 117, 119
–, Cosinus- 126, 134, 154, 165
–, Definitionsmenge 5, 14
–, Exponential- 78ff., 118
–, ganzrationale 32
–, gerade 7, 14, 32, 39, 134, 165
–, Hyperbel- 116, 119
–, lineare 5, 79
–, logarithmische (Logarithmusfunktion) 110, 118
–, Monotonie 7, 14
–, periodische 7, 133f., 165
–, Polynom- 32, 39
–, –, 2. Grads 44ff.
–, Potenz- 28ff., 39, 79
–, quadratische 44ff., 71
–, –, Anwendungen 52f.
–, Sinus- 126, 133, 165
–, –, allgemeine 151f., 165
–, streng monoton fallende bzw. steigende 7, 13
–, Tangens- 126, 134, 165
–, trigonometrische (Winkelfunktion) 124ff., 165
–, –, allgemeine 151f.
–, Umkehr- 11ff.
–, –, zur Potenzfunktion 34, 39
–, ungerade 7, 14, 32, 39, 133f., 165
–, Wertemenge 5, 14
–, Wurzel- 34, 39
Funktionsgleichung 5
–, parameterfreie 177
– von Parabeln 46, 71
Funktionsgraph 5
Funktionsleiter 112

G
ganzrationale Funktion 32
ganzzahliger Exponent 18
Gauß, Carl Friedrich 188, 209
Gauß-Jordan-Algorithmus 248
Gauß'sche Zahlenebene 189, 211
gemischtquadratische Gleichung 59
Genauigkeit, beschränkte 297
GeoGebra 19, 53, 64, 89, 128, 160, 200, 206
geometrische Folge 283, 291, 294
– Reihe, endliche 288, 294
Gerade 5
– im Raum 235
– in der Ebene 232ff.
gerade Funktion 7, 14, 32, 39, 134, 165
Geradengleichung 232ff., 238
Geschwindigkeit, Winkel- 151
Gesetz von Weber-Fechner 108
gespitzte Zykloide 178
gestreckte Zykloide 178
gleiche Radikanden 21f., 39
– Wurzelexponenten 21, 39
Gleichung, Exponential- 102
–, Funktions- 5
– , –, parameterfreie 177
–, –, von Parabeln 46, 71
– , gemischtquadratische 59
–, goniometrische 161ff., 165
–, logarithmische 107
–, Lösen 207ff.
–, quadratische 58ff., 71, 207ff., 211
–, –, allgemeine 60ff.
–, reinquadratische 58
–, Wurzel- 37, 39
– einer Ebene 236, 238
– – Geraden 232ff., 238
– höheren Grads 209
– mit komplexen Koeffizienten 210
Gleichungssystem in Matrizenschreibweise 253
Glied einer Zahlenfolge 276
globales Maximum bzw. Minimum 6
goldene Spirale 175
Goniometrie (Winkelmessung) 148
goniometrische Beziehungen 148ff., 165
– Gleichung 161ff., 165
Gozintograph (Verflechtungsgraph) 251
Grad der Potenzfunktion 28
Gradmaß 124
Graph, Funktions- 5
–, Gozinto- (Verflechtungsgraph) 251
– der Arcusfunktionen 135
– – Areafunktionen 117
– – Cosinusfunktion 134
– – Sinusfunktion 133
– – Tangensfunktion 134
große Lösungsformel (quadratische Gleichungen) 60, 71
Grundgesamtheit 258, 265, 273
–, Varianz einer 271, 273
Grundparabel 44, 71
Grundrechnungsarten (komplexe Zahlen) 196ff., 211

H
Halbwertszeit 88
harmonische Schwingung 155
Häufigkeit, absolute 260, 266
–, prozentuelle 260
–, relative 260, 266
Häufigkeitssumme 261
Häufigkeitsverteilung 260, 273
Hauptwert der komplexen Zahl 191
Histogramm 264
Hochpunkt 6, 8, 14
Höhenformel, barometrische 122
Hyperbel n-ter Ordnung (n-ten Grads) 28
Hyperbelfunktion 116, 119
hyperbolische Spirale 174
Hypozykloide 179, 183

I
imaginäre Achse 189
– Einheit 186f., 211
– Zahl 186f., 211
Imaginärteil (komplexe Zahl) 188, 192, 211
Index (Indices) 241
Interpolation 48, 71
Interquartilsabstand 270, 273
inverse Matrix 248f., 254
inverses Element 248
Invertieren einer Matrix 248f., 254

J
Jet d'Eau (Genf) 35
Jordan, Wilhelm 248

K
Kaffeehäferlkurve 183
Kapitalertragsteuer (KESt) 290
Kardioide 183
Kastenschaubild (Boxplot) 267
Kepler, Johannes 80
Kettenlinie 116
Klasse (Statistik) 264
Klassenbildung 264, 273
Klasseneinteilung 264
kleine Lösungsformel (quadratische Gleichungen) 60, 71
Koeffizient, komplexer 210
Koeffizientenmatrix 253
kommutativ 243
Komplementärwinkel 127
komplexe Koeffizienten, Gleichung 210
– Zahl 188ff.
– –, Addition 196, 211
– –, Division 201f., 211
– –, Grundrechnungsarten 196ff., 211
– –, konjugiert 199, 207, 211
– –, Multiplikation 198f., 211
– –, Potenz 204ff., 211
– –, Subtraktion 196, 211
– –, Wurzel 205
Komponentenform (komplexe Zahl) 190, 192, 201f.
König Karl II. 293
konjugiert komplexe Zahl 199, 207, 211
Koordinate, Polar- (komplexe Zahl) 191
–, – (Kurvendarstellung) 172ff.
Koordinatenschreibweise, Skalarprodukt 217
–, Vektorprodukt 227
Koordinatensystem, dreidimensionales 222
–, logarithmisches 113f., 118
Koordinatenursprung, punktsymmetrisch zum 7, 14, 133f.
Kreis, Einheits- 125ff., 165
–, Parameterdarstellung 176, 181
Kreisdiagramm 175
Kreisevolvente 184
Kreisfrequenz 151, 155, 165
Kreuzprodukt (Vektorprodukt, vektorielles Produkt) 226ff., 238
Kronecker, Leopold 186
Kurve, Cosinus- 134
–, Rosen- 175
–, Sinus- 133
–, Tangens- 134
– in Parameterdarstellung 176ff., 184
– – Polarkoordinaten 172ff., 184
Kurvendarstellung 172ff.
Kurvengleichung in Polarkoordinaten 174

L
Lagebeziehung von zwei Geraden 233
Lagemaß 265ff., 273
liegende Parabel 177
lineare Funktion 5, 79
– Interpolation 48, 71
lineares Gleichungssystem in Matrizenschreibweise 253
Linearfaktor 62, 71
Linearkombination 217
Linksdrehung 215
Linkssystem (linkshändiges Koordinatensystem) 222
Lissajous, Jules Antoine 180
Lissajous-Figur 180
Logarithmieren 97f.
logarithmische Funktion (Logarithmusfunktion) 110, 118
– Gleichung 107
– Skalierungen 112, 118
– Spirale 174
logarithmisches Koordinatensystem 113f., 118
– Wachstum 110

Sachwortverzeichnis

Logarithmus (Logarithmen) 97ff., 118
–, binärer (Zweier-) 98
–, dekadischer (Zehner-) 98
–, natürlicher 98
–, Rechenregeln 100, 118
logistisches Wachstum 90, 92, 118
lokales Maximum bzw. Minimum 6
Lösen von Gleichungen 207ff.
Lösungen einer quadratischen Gleichung 61, 71
Lösungsformel für quadratische Gleichungen 60, 71

M
Mathcad 175, 304f.
Matrix (Matrizen) 240ff., 254
–, Addition 242f., 254
–, Anwendungen 250ff.
–, Diagonal- 241
–, Dreh- 250
–, Einheits- 241, 244
–, Element 241, 254
–, inverse 248f., 254
–, Koeffizienten- 253
–, Multiplikation mit einem Skalar 242f., 254
–, – zweier 244f., 254
–, Null- 241, 244
–, quadratische 241
–, Rechnen 242ff.
–, Spiegelungs- 256
–, Subtraktion 242f., 254
–, symmetrische 241
–, transponierte 241
– in Dreiecksform 241
Matrizenschreibweise, Gleichungssystem 253
Maximum 6, 8, 14
–, globales bzw. lokales 6
Median (Zentralwert) 266, 273
Mediane, erste 7
–, –, Spiegelung 12, 14, 34, 39
Menge der komplexen Zahlen 188
– – – –, Grundrechnungsarten 196ff.
Merkmal 258f.
–, diskretes 259
–, metrisches (quantitatives) 259, 273
–, nominales (qualitatives) 259, 273
–, ordinales (Rangmerkmal) 259, 273
–, stetiges 259
Merkmalsausprägung 258
Merz, Mario 277
Messfehler 300f.
metrisches (quantitatives) Merkmal 259, 273
Minimum 6, 8, 14
–, globales bzw. lokales 6
Mittel, arithmetisches 265f., 273
Mittelpunkt einer Strecke 214
Modalwert (Modus) 268, 273
Moivre, Abraham de 204
–, Satz von 204, 211
Monotonie von Funktionen 7, 14
Multiplikation, skalare 216, 222
– einer Matrix mit einem Skalar 242f., 254
– eines Vektors mit einer reellen Zahl 214, 222
– von komplexen Zahlen 198f., 211
– – Matrizen 244f., 254
– – Wurzeln 21f., 39

N
Napier, John 80
Napier's constant 80
natürlicher Logarithmus 98
negativer Winkel 127
Neil, William 184
Neil'sche Parabel 184
Nenner, Rationalmachen 23
Nephroide 183
neutrales Element 248
nominales (qualitatives) Merkmal 259, 273
Normalform der quadratischen Gleichung 60, 71
Normalvektor 215, 238
Normalvektorform einer Ebene 237f.
– – Geraden 234, 238
Normzahlreihe 286f., 294
n-te Wurzel 19, 205f., 211
n-ter Grad (n-te Ordnung), Hyperbel 28
–, Parabel 28
–, Polynomfunktion 32
Nullmatrix 241, 244
Nullphasenwinkel 155, 165
Nullstelle 6, 8, 14, 61, 71, 155
Nullstellensatz für Polynome 209
Numerus 97

O
Oktave 285
ordinales Merkmal (Rangmerkmal) 259, 273
ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem 113, 118
Ordnung einer quadratischen Matrix 241
orthogonale Vektoren 215f.
Ortsvektor (Zeiger) 155, 214

P
Parabel 28, 44ff., 71
–, Funktionsgleichung 46, 71
–, Grund- 44, 71
–, liegende 177
–, Neil'sche 184
–, Veränderung des Graphen 45, 71
Parallelepiped (Spat), Volumen 228, 238
Parallelogramm, Flächeninhalt 218, 228, 238
Parameter 176
Parameterdarstellung, Kreis 176, 181
–, Kurven 176ff., 184
–, schiefer Wurf 176
Parameterform einer Ebene 237f.
– – Geraden 232, 238
parameterfreie Darstellung einer Geraden 234
– Funktionsgleichung 177
Pareto, Vilfredo 260
Pareto-Diagramm 260
partielles (teilweises) Wurzelziehen 23, 39
Periode 7, 14
Periodendauer (Fadenpendel) 36
– (Sinusschwingung) 155, 165
periodische Funktion 7, 133f., 165
Periodizität von Funktionen 7
Peripheriewinkelsatz 139
Perzentil 268
Phasenverschiebung 152, 155, 180
Planungsrechnung 251
Pol (Polstelle) 8, 14, 28, 134, 172f.
Polarachse 172f.
Polarform (komplexe Zahl) 191f., 201f., 204
Polarkoordinate (komplexe Zahl) 191
– (Kurvendarstellung) 172ff., 184
Polarwinkel 172, 191
Polstelle (Pol) 8, 14, 28, 134, 172f.
Polstrahl 172f.
Polynom, Nullstellensatz 209
Polynomform 46, 71
Polynomfunktion 32, 39
– 2. Grads 44ff.
– n-ten Grads 32
Potenz 18ff.
– der imaginären Einheit 187
– mit ganzzahligen Exponenten 18
– – rationalem Exponenten 19
– von komplexen Zahlen 204ff., 211
Potenzfunktion 28ff., 39, 79
–, Umkehrfunktion zur 34, 39
–, Veränderung des Graphen 29, 39
Potenzieren 97f.
– von Wurzeln 22, 39
Potenzschreibweise, Wurzel 19, 39
Produkt, Skalar-, zweier Vektoren 216f., 222, 238
–, Spat- 228
–, Vektor- (vektorielles Produkt, Kreuzprodukt) 226ff., 238
Produkt-Null-Satz 59
prozentuelle Häufigkeit 260
punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung 7, 14, 133f.

Q
quadratische Ergänzung 46, 60
– Funktion 44ff., 71
– –, Anwendungen 52f.
– Gleichung 58ff., 71, 207ff., 211
– Interpolation 48, 71
– Matrix 241
Quadratwurzel 19
qualitatives (nominales) Merkmal 259, 273
Quantil 266ff.
quantitatives (metrisches) Merkmal 259, 273
Quartil 267, 273

R
Radikanden, gleiche 21f., 39
Radizieren (Wurzelziehen) von Wurzeln 22, 39
Radlinie 178
Range (Spannweite) 270, 273
Rangmerkmal (ordinales Merkmal) 259, 273
rationaler Exponent 19
Rationalmachen von Nennern 23
Raum, Ebene im 236
–, Gerade im 235
–, Vektor im 222
Realteil (komplexe Zahl) 188, 192, 211
Rechenregeln für Logarithmen 100, 118
Rechnen mit Matrizen 242ff.
– – Potenzen 18
– – Wurzeln 21ff., 39
rechteckiges Zahlenschema 241
Rechtsdrehung 215
Rechtssystem (rechtshändiges Koordinatensystem) 222
rechtwinkliges Dreieck 124
reelle Achse 189
Regel, Cramer'sche 235
– von Sarrus 246
Reihe, endliche arithmetische 281, 294
–, – geometrische 288, 294
–, Normzahl- 286f., 294

reinquadratische Gleichung 58
Rekursionsformel 277
Relation, Umkehr- 11
relative Häufigkeit 260, 266
relativer Fehler 298
Repräsentant eines Vektors 214
Richter, Charles Francis 111
Richtungsvektor 232
Richtungswinkel (Polarwinkel, Azimut) 172
Rosenkurve 175
Rudolff, Christoff 289
Rundungsfehler 296, 299

S

Sarrus, Regel 246
Sättigungsvorgänge 90, 118
Satz, Cosinus- 140, 143, 165
–, Fundamental-, der Algebra 209
–, Peripheriewinkel- 139
–, Produkt-Null- 59
–, Sinus- 139, 141f., 165
– von de Moivre 204, 211
– – Thales 139
– – Vieta 62, 71
Säulendiagramm 260
Scheitel der Parabel 28
Scheitelpunktform 46, 71
Schema, Falk'sches 245
schiefer Wurf, Parameterdarstellung 176
Schwebung 160
Schwebungsfrequenz 160
Schwerpunkt eines Dreiecks 214
Schwingung, harmonische (Sinusschwingung) 155
–, Überlagerung 158ff., 165
Schwingungsvorgänge, aperiodische 92, 118
Sinus 124ff., 165
– hyperbolicus 116
Sinusfunktion 126, 133, 165
–, allgemeine 151f., 165
–, Arcus- 135, 165
Sinuskurve 133
Sinussatz 139, 141f., 165
Sinusschwingung 155
Skalar 216
–, Multiplikation einer Matrix mit einem 242f., 254
skalare Multiplikation 216, 222
Skalarprodukt zweier Vektoren 216f., 222, 238
Skalierungen, logarithmische 112, 118
Spaltenvektor 241
Spannweite (Range) 270, 273
Spat (Parallelepiped), Volumen 228, 238
Spatprodukt 228
Spiegelung an der ersten Mediane 12, 14, 34, 39
– – – x-Achse 83
Spiegelungsmatrix 256
Spirale, archimedische 174
–, goldene 175
–, hyperbolische 174
–, logarithmische 174
Standardabweichung 270f., 273
Statistik 258ff., 273
statistische Erhebung 258
Stauchung des Graphen einer Exponentialfunktion 83
– – – – Potenzfunktion 29, 39
Sternlinie (Astroide) 180
stetige Verzinsung 81
stetiges Merkmal 259
Stichprobe 258, 265, 273
–, Varianz einer 271, 273
Stifel, Michael 80
Strahl, Polar- 172f.
Strecke, Mittelpunkt 214
Streckung des Graphen einer Exponentialfunktion 83
– – – – Potenzfunktion 29, 39
–, Dreh- 250
streng monoton fallende bzw. steigende Funktion 7, 14
Streuungsmaß 270f., 273
Strichliste 260
Stufensprung 286
Subtraktion von komplexen Zahlen 196, 211
– – Matrizen 242f., 254
– – Vektoren 214, 222
– – Wurzeln 21, 39
Summe einer endlichen arithmetischen Reihe 281, 294
– – – geometrischen Reihe 288, 294
–, Häufigkeits- 261
Summensatz, erster und zweiter 149, 165
Summenzeichen 281
Supplementärwinkel 127
Symmetrie von Funktionen 7, 14
– – Polynomfunktionen 32
symmetrisch zur y-Achse 7, 14, 134
symmetrische Matrix 241

T

tabellarische Darstellung von Daten 260
Tabellenkalkulationsprogramm Excel 247, 262ff., 269, 272
Tangens 124ff., 165
– hyperbolicus 116
Tangensfunktion 126, 134, 165
–, Arcus- 135, 165
Tangenskurve 134
teilweises (partielles) Wurzelziehen 23, 39
Tetraeder, Volumen 228
Thales, Satz 139
Tiefpunkt 6, 8, 14
TI-Nspire 8, 9, 25, 36, 45, 47, 54, 64, 85, 100, 104, 136, 153, 164, 182f., 194, 208, 219, 229, 247, 249
transponierte Matrix 241
Trigonometrie 124ff.
trigonometrische Flächenformel 138, 165
– Form (komplexe Zahl) 191f., 202, 204
– Funktion (Winkelfunktion) 124ff., 165
– –, allgemeine 151f.

U

Überlagerung von Schwingungen 158ff., 165
Umkehrfunktion 11ff.
– zur Potenzfunktion 34, 39
Umkehrrelation 11
unendliche Folge 276
Unendlichkeitsstelle 8
ungerade Funktion 7, 14, 32, 39, 133f., 165
Urliste 260
Ursprung (Koordinatenursprung), punktsymmetrisch 7, 14, 133f.

V

Varianz 270f., 273
– einer Grundgesamtheit 271, 273
– – Stichprobe 271, 273
Vektor 214ff.
–, Addition 214, 222
–, Basis- 217
–, Betrag 214, 222
–, dreidimensionaler 222
–, Einheits- 214, 222
–, Multiplikation mit einer reellen Zahl 214, 222
–, Normal- 215, 238
–, orthogonal 215f.
–, Orts- 214
–, Richtungs- 232
–, Skalarprodukt 216f., 222, 238
–, Spalten- 241
–, Subtraktion 214, 222
–, Winkel zwischen zwei 218, 238
–, Zeilen- 241
– im Raum 222
Vektorprodukt (vektorielles Produkt, Kreuzprodukt) 226ff., 238
Veränderung des Graphen einer Exponentialfunktion 83
– – – – Potenzfunktion 29, 39
Verfahrensfehler 296
Verflechtungsgraph (Gozintograph) 251
Vergessenskurve nach Ebbinghaus 95
Verschiebung in x- bzw. y-Richtung, Exponentialfunktion 83
– – – – –, Parabel 45, 71
– – – – –, Potenzfunktion 29, 39
verschlungene Zykloide 178
Versor 191
Verteilung, Häufigkeits- 260, 273
Verzinsung, stetige 81
Verzinsungsdauer 290f., 294
Vieta, Satz 62, 71
Viète, Francois 62
Volumen eines Parallelepipeds 228, 238
– – Tetraeders 228, 238
Volumenberechnungen mithilfe des Vektorprodukts 228
Vorzeichenregel für Potenzen 18

W

Wachstum, exponentielles 87, 90
–, logarithmisches 110
–, logistisches 90, 92, 118
Wachstumsfaktor 87
Wachstumsvorgänge 87ff., 118
Weber-Fechner-Gesetz 108
Wertemenge einer Funktion 5, 14
Wertetabelle 5
Wertschrankenmethode 302
Wessel, Caspar 189
Winkel, Komplementär- 127
–, negativer 127
–, Nullphasen- 155, 165
–, Polar- (Argument) 172, 191
–, Supplementär- 127
– zwischen zwei Vektoren 218, 238
Winkelfunktion (trigonometrische Funktion) 124ff., 165
–, allgemeine 151f.
Winkelgeschwindigkeit 151
Winkler, Georg, Edler von Brückenbrand 293
Wurf, schiefer, Parameterdarstellung 176
Wurzel 19
–, Addition 21, 39
–, Division 21f., 39
–, Einheits- 206
–, Multiplikation 21f., 39
–, Potenzieren 22, 39
–, Radizieren (Wurzelziehen) 22, 39

Sachwortverzeichnis

–, Rechnen (Rechenregeln) 21ff., 39
–, Subtraktion 21, 39
– in Potenzschreibweise 19, 39
– von komplexen Zahlen 205
Wurzelexponenten, gleiche 21, 39
Wurzelfunktion 34, 39
Wurzelgleichung 37, 39
Wurzelziehen (Radizieren) 97f.
–, partielles (teilweises) 23, 39
– von Wurzeln 22, 39

X
x-Richtung, Verschiebung einer
Exponentialfunktion 83
–, – – Parabel 45, 71
–, – – Potenzfunktion 29, 39

Y
y-Achse, symmetrisch zur 7, 14, 134
y-Richtung, Verschiebung einer
Exponentialfunktion 83
–, – – Parabel 45, 71
–, – – Potenzfunktion 29, 39

Z
Zahl, Euler'sche 80f.
–, imaginäre 186f., 211
–, komplexe 188ff.
–, –, Addition 196, 211
–, –, Division 201f., 211
–, –, Grundrechnungsarten 196ff., 211
–, –, Multiplikation 198f., 211
–, –, Potenz 204ff., 211
–, –, Subtraktion 196, 211
–, –, Wurzel 205
–, konjugiert komplexe 199, 207, 211
– beschränkter Genauigkeit 297
Zahlenebene, Gauß'sche 189, 211
Zahlenfolge siehe Folge
Zahlenpaar (komplexe Zahl) 189f.
Zahlenschema, rechteckiges 241
Zehnerlogarithmus 98
Zeiger (Ortsvektor) 155, 214
Zeigerdiagramm 155, 158f.
Zeilenvektor 241
Zeitkonstante 88
Zentralwert (Median) 266, 273
Zentrum für internationale
Lichtkunst 277
Zerfallsprozesse (Abklingvorgänge,
Abnahmevorgänge) 88, 118
Zerlegung in Linearfaktoren 62, 71
Zinsen 290f.
–, einfache 290, 294
Zinseszinsen 291, 294
Zinseszinsrechnung 291
Zinsrechnung, einfache 290
Zinssatz 290f., 294
Zweierlogarithmus 98
zweiter Summensatz 149, 165
Zykloide 178f.

verlaghpt.at

Diese Mathematikreihe bietet in zeitgemäßer Sprache und funktionellem Layout altersadäquate Zugänge zur Mathematik und ihren technischen Anwendungen. Nach lebensnahen Einstiegen erfolgt in schrittweisen Erklärungen eine Erarbeitung des Basiswissens. Dieses wird in alltagsbezogenen und vernetzten Aufgaben angewendet und erweitert.

- altersadäquate Einstiege
- zeitgemäße Sprache und Layout
- alltagsbezogene und technische Aufgaben
- vernetzte Aufgaben

www.verlaghpt.at

Mathematik mit techn. Anwend. 2 (LP 2011)
Schulbuchnummer: 160001
ISBN 978-3-230-03552-3
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9 783230 035523